MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

20. BAND 3./4. HEFT

(AUSGEGEBEN AM 24. MAI 1924)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1924

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, deren vier zu einem Bande vereinigt werden sollen.

Jährlich sollen drei Bände herausgegeben werden. Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Königsberg, Bergplatz 6,
L. Lichtenstein, Leipzig, Talstraße 35, Mathematisches Institut,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

20. Band. **Inhalt:** 3./4. Heft.

Seite

Prüfer, H., Theorie der Abelschen Gruppen. I. Grundeigenschaften 165
Waelsch, E., Zur Tensoralgebra 188
Weitzenböck, R., Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit des Herrn Waelsch . 193
Lichtenstein, L., Neue Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus 194
Alexandroff, P., Über die Äquivalenz des Perronschen und des Denjoyschen Integralbegriffes 213
Brandt, H., Bilineare Transformation quaternärer quadratischer Formen . . . 223
Pasch, M., Betrachtungen zur Begründung der Mathematik 231
Salkowski, E., Zur Theorie der Voßschen und der Guichardschen Flächen . . 241
Nevanlinna, F. und R., Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion . 253
Kubota, T., Eine Ungleichheit für die Eilinien 264
Ore, Ö., Zur Theorie der Eisensteinschen Gleichungen 267
Rogosinski, W., Zur Theorie der Dirichletschen Reihen 280

Theorie der Abelschen Gruppen.

I. Grundeigenschaften[1]).

Von

Heinz Prüfer in Jena.

§ 1.

Unter einer *Abelschen Gruppe* — in dieser Arbeit meist kurz *Gruppe* genannt — versteht man eine Menge von Elementen, zwischen denen eine assoziative, kommutative und eindeutig umkehrbare Multiplikation so definiert ist, daß Produkt und Quotient je zweier Elemente der Menge wieder zur Menge gehören. Alle bei der Multiplikation von Zahlen gebräuchlichen Begriffe, wie Produkt, Quotient, Faktor, Potenz usw. übertragen sich mitsamt den dort gültigen Rechenregeln ohne weiteres auf Abelsche Gruppen. Der Zahl 1 entspricht dabei das eindeutig bestimmte *Einheitselement* der Gruppe, das, mit einem beliebigen Gruppenelement multipliziert, dieses nicht ändert. Kann man die Elemente zweier Gruppen einander umkehrbar eindeutig so zuordnen, daß die Produkte entsprechender Elemente sich wieder entsprechen, so heißen die Gruppen *isomorph* oder vom gleichen *Typus*.

In dieser Arbeit untersuche ich Eigenschaften der allgemeinsten Abelschen Gruppen, soweit diese allen Gruppen desselben Typus gemeinsam sind. Insbesondere mache ich über die Mächtigkeit der Menge der Gruppenelemente keine einschränkende Voraussetzung[2]).

[1]) Mit Teil II. zusammen von der Philosophischen Fakultät der Universität Jena als Habilitationsschrift angenommen.

[2]) Literatur über unendliche Abelsche Gruppen:

F. Levi, Abelsche Gruppen mit abzählbaren Elementen. Leipzig: B. G. Teubner (1917).

W. Schmeidler, Bemerkungen zur Theorie der abzählbaren Abelschen Gruppen, Math. Zeitschrift **6** (1920), S. 274—280.

H. Prüfer, Unendliche Abelsche Gruppen von Elementen endlicher Ordnung, Dissertation, Berlin (1921).

H. Prüfer, Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen, Math. Zeitschrift **17** (1923), S. 35—61.

Abelsche Gruppen treten in der Mathematik erstens als Spezialfälle der Gruppen auf, die aus Abbildungen von Mengen auf sich bestehen. Beispiele bilden die Gruppen der Abelschen Gleichungen, der Überlagerungsflächen der Abelschen Integrale, der Translationen im Euklidischen Raume. Zweitens führen Untersuchungen von Teilbarkeitseigenschaften auf Abelsche Gruppen. Hierher gehören die Dedekindschen Moduln und Ideale, die Gruppen der Idealklassen und Einheiten eines algebraischen Zahlkörpers. Dieses Auftreten der Abelschen Gruppen beruht letzten Endes darauf, daß Ringe und Körper Abelsche Gruppen sind, wenn man die Addition als Verknüpfungsoperation ihrer Elemente ansieht, und daß die Elemente eines Körpers, nach Ausschluß der Null, außerdem hinsichtlich der Multiplikation eine solche Gruppe bilden.

Bei den Abelschen Gruppen, auf welche konkrete mathematische Probleme führen, tritt hiernach die Gruppenoperation bald als Multiplikation, bald als Addition auf. Wenn ich hier die Darstellung an die multiplikativen Gruppen anschließe, so geschieht das nur, um mit der sonst in der Gruppentheorie üblichen Darstellung in Einklang zu bleiben. Ich werde aber alle Bezeichnungen so wählen, daß eine Übertragung in die additive Sprache sofort möglich ist. Diese Übertragung werde ich in dieser Arbeit in einem speziellen Falle, nämlich bei der Gruppe der rationalen Zahlen, selbst vorzunehmen haben.

Der Zusammenhang, in dem die Abelschen Gruppen mit den rationalen Zahlen stehen, geht aus einer Verallgemeinerung hervor, die man mit dem Gruppenbegriff vornehmen kann. Neben der Multiplikation führe man noch eine Potenzierung der Gruppenelemente ein. Um die gewöhnlichen Rechenregeln zu erhalten, braucht man nur zu verlangen, daß die Exponenten, die zugelassen werden, die Elemente eines Ringes sind. Man fordere also, daß, wenn r ein Element dieses Ringes, von jedem Element E der Gruppe auch die Potenz E^r in der Gruppe vorkommt. Aus diesem allgemeineren Gruppenbegriff erhält man die gewöhnlichen Abelschen Gruppen als Spezialfall, wenn man als Exponenten die ganzen rationalen Zahlen nimmt. Ich lasse in dieser Arbeit die genannte Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs unberücksichtigt. Ich bemerke nur, daß auf gewisse Exponentenringe meine Schlußweisen und Resultate ohne weiteres ausgedehnt werden können. Alle zahlentheoretischen Sätze, die ich benutze, lassen sich nämlich aus diesen beiden Eigenschaften der ganzen rationalen Zahlen herleiten:

1. Jeder ganze Modul kann durch eine Zahl erzeugt werden. Dabei heißt eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von den Elementen $A, B, \ldots$ *erzeugt*: $\mathfrak{G} = \mathrm{grp}(A, B, \ldots)$, wenn jedes ihrer Elemente ein Produkt von Potenzen dieser Elemente ist.

Eine additive Gruppe von (ganzen) Zahlen nenne ich, altem Brauche folgend, einen (*ganzen*) *Modul*.

2. Das Produkt zweier ganzer rationaler Zahlen ist nur dann gleich 0, wenn ein Faktor gleich 0 ist.

Die oben genannten Beispiele zeigen bereits, daß einfache mathematische Probleme hauptsächlich auf solche Abelschen Gruppen führen, die durch endlich viele Elemente erzeugt werden können. Deshalb beschränkte sich auch bis vor kurzem die Untersuchung auf diese spezielle Klasse von Gruppen[3]). Diese Gruppen beherrscht man vollständig mittels eines fundamentalen Satzes. Da ich an diesen Satz in meiner Problemstellung anknüpfe, will ich ihn formulieren und beweisen. Ich gehe dann so vor, daß ich die beim Beweis implizit benutzten Begriffe herausstelle und auf allgemeine Gruppen übertrage. Das ist der Inhalt des vorliegenden 1. Teiles dieser Abhandlung.

§ 2.

Läßt sich eine Gruppe durch endlich viele Elemente $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *erzeugen, so können diese so ausgewählt werden, daß nur dann* $\Pi E_\nu^{a_\nu} = \Pi E_\nu^{b_\nu}$ *wird, wenn* $E_\nu^{a_\nu} = E_\nu^{b_\nu}$ *ist.*

Dem Beweise schicke ich einige Bemerkungen voraus, die sich auf beliebige Gruppen beziehen. Im folgenden seien $A, B, \ldots$ Elemente einer Gruppe $\mathfrak{G}$ mit dem Einheitselement $\mathfrak{E}$.

1. Ist $A^a = B^b$ und ist d der größte gemeinsame Teiler von a und b, so gibt es in $\mathfrak{G}$ ein Element C, für welches

$$C^{ab:d} = A^a = B^b, \quad C^a = B^d, \quad C^b = A^d$$

wird. Man hat nur $C = A^r B^s$ zu setzen, wenn $br + as = d$. Für $d = 1$ sind A und B in grp C enthalten.

2. Ist $A^a = \mathfrak{E}$, so hat die Gleichung $X^b = A^c$ in grp A eine Lösung, wenn c durch den größten gemeinsamen Teiler d von a und b teilbar ist. Man setze nämlich $X = A^r$, wenn $br \equiv c \pmod{a}$.

3. Die Zahlen a, für welche $A^a = \mathfrak{E}$, sind die Vielfachen einer Zahl a_0, der *Ordnung* von A. Ist c zu a_0 teilerfremd, so ist die Gleichung $X^b = A^c$ nur dann durch ein Element A^r lösbar, wenn auch b zu a_0 teilerfremd ist. Denn $br - c$ muß durch a_0 teilbar sein.

4. Eine Gruppe $\mathfrak{F}$, deren sämtliche Elemente auch Elemente von $\mathfrak{G}$ sind, heißt eine *Untergruppe* von $\mathfrak{G}$. Man nennt A und B nach $\mathfrak{F}$ *kon-*

[3]) Hinsichtlich der Literatur verweise ich auf die französische Ausgabe der Encyklopädie der Math. Wiss. Bd. I, 1, S. 601ff. und 2, S. 342ff.

gruent: $A \equiv B\ (\mathfrak{F})$, wenn AB^{-1} in $\mathfrak{F}$ enthalten ist. Betrachtet man nach $\mathfrak{F}$ kongruente Elemente von $\mathfrak{G}$ nicht als verschieden, so bleiben Produkt und Quotient der Elemente eindeutig bestimmt. Man erhält daher eine Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$.

5. Wird die Gruppe der in $\mathfrak{F}$ enthaltenen Potenzen von A durch A^a erzeugt und hat die Gleichung $X^a = A^a$ in $\mathfrak{F}$ eine Wurzel B, so ist $C = AB^{-1} \equiv A\ (\mathfrak{F})$ und grp C hat mit $\mathfrak{F}$ nur das Einheitselement gemeinsam.

Der Beweis des obigen Satzes gestaltet sich jetzt so:

I. Wird $\mathfrak{G}$ durch die Elemente $E_1, E_2, \ldots, E_n$ erzeugt und ist $A_1, A_2, \ldots$ eine unendliche Folge von Elementen aus $\mathfrak{G}$, so sind, für eine hinreichend große Zahl m, alle Elemente von $\mathfrak{F} = \text{grp}\ (A_1, A_2, \ldots)$ bereits in grp $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ enthalten. Für $n = 1$ ist der Satz richtig, weil es keine unendliche Folge wachsender ganzer Moduln gibt. Der Beweis kann also durch Induktion erfolgen. Jedes Element von $\mathfrak{G}' = \text{grp}\ (E_1, E_2, \ldots, E_{n-1})$, das in $\mathfrak{F}$ enthalten ist, komme bereits in grp $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ vor. Die Zahlen e, für welche E_n^e nach $\mathfrak{G}'$ zu einem Elemente von $\mathfrak{F}$ kongruent ist, bilden einen Modul. Wird dieser durch e_0 erzeugt und ist B ein zu $E_n^{e_0}$ nach $\mathfrak{G}'$ kongruentes Element von $\mathfrak{F}$, so ist $\mathfrak{F} = \text{grp}\ (A_1, A_2, \ldots, A_k, B)$. Für hinreichend großes l ist B aber in grp $(A_1, A_2, \ldots, A_l)$ enthalten.

II. In $\mathfrak{G}$ gibt es mindestens ein vom Einheitselement $\mathfrak{E}$ verschiedenes Element E, für welches jede in $\mathfrak{G}$ lösbare Gleichung $X^e = E$ schon in grp E eine Wurzel hat. Denn sonst gäbe es, im Widerspruch zu I., in $\mathfrak{G}$ eine unendliche Folge von Elementen, von denen jedes eine Potenz des folgenden wäre, aber keins der von seinen Vorgängern erzeugten Gruppe angehörte. Von den Elementen E kann man eins, A, so auswählen, daß die Ordnung keines Elementes E ein echter Teiler der Ordnung a_0 von A ist.

III. Jede Gleichung $X^b = A^a$, die in $\mathfrak{G}$ eine Wurzel B hat, ist auch in grp A lösbar. Für $b = 0$ ist das selbstverständlich. Ist $b \neq 0$, so genügt es wegen 1., den Satz für den Fall zu beweisen, daß b eine Primzahlpotenz, $b = p^l$, ist. Ist p^k die höchste in a aufgehende Potenz von p, so hat man wegen 2. nur zu zeigen, daß nicht zugleich $l > k$ und a_0 durch p^{k+1} teilbar sein kann. Angenommen, dieser Fall liege vor: Dann kann die Gleichung $X^p = A^{ap^{-k}}$ in $\mathfrak{G}$ keine Wurzel besitzen. Denn nach 1. würde hieraus die Lösbarkeit der Gleichung $X^p = A$ folgen, während diese nach 3. in grp A nicht lösbar ist. Setzt man

$$C = A^{ap^{-k}} \cdot B^{-p^{l-k}},$$

so ist daher auch die Gleichung $X^p = C$ in $\mathfrak{G}$ unlösbar. Daraus folgt zunächst $C \neq \mathfrak{E}$. Für jedes nicht durch p teilbare c hat die Gleichung

$X^c = C$, wie aus $C^{p^k} = \mathfrak{E}$ nach 2. folgt, bereits eine Potenz von C zur Wurzel. Jede in $\mathfrak{G}$ lösbare Gleichung $X^c = C$ ist also auch in grp C lösbar. Daher gehört C zu den Elementen E in II. Die Ordnung von C ist aber ein echter Teiler von a_0. Das widerspricht der Definition von A.

IV. Ist $\mathfrak{F}_k = \text{grp}\,(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und ist für jedes Element A von $\mathfrak{F}_k$ jede Gleichung $X^c = A$ entweder in $\mathfrak{F}_k$ lösbar oder in $\mathfrak{G}$ unlösbar, so gibt es ein Element $B = A_{k+1}$, für welches die Untergruppe $\mathfrak{F}_{k+1} = \text{grp}\,(A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1})$ von $\mathfrak{G}$ dieselbe Eigenschaft hat. In der Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_k$, die ja auch durch endlich viele Elemente erzeugt wird, bestimme man nämlich eins der in II. definierten Elemente. Das Element B von $\mathfrak{G}$ möge dieses Element von $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_k$ repräsentieren. Gilt nun, für ein Element C von $\mathfrak{G}$ eine Gleichung $C^c = AB^b$, in der A ein Element von $\mathfrak{F}_k$ bedeutet, so läßt sich nach III. die Kongruenz $X^c \equiv B^b\,(\mathfrak{F}_k)$ durch ein Element B^r lösen. Dann ist $(CB^{-r})^c$ ein Element von $\mathfrak{F}_k$. Nach der Voraussetzung besteht daher für ein Element A' von $\mathfrak{F}_k$ die Gleichung $A'^c = (CB^{-r})^c$. Daraus folgt, daß $A'B^r$ eine Wurzel der Gleichung $X^c = AB^b$ in $\mathfrak{F}_{k+1}$ ist.

V. Bildet man, von $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{E}$ ausgehend, Gruppen $\mathfrak{F}_k$, so muß nach I. das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbrechen. Sei $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{G}$.

VI. Man ersetze A_{k+1} durch ein nach $\mathfrak{F}_k$ kongruentes Element E_{k+1}, für welches grp E_{k+1} mit $\mathfrak{F}_k$ nur das Einheitselement gemeinsam hat. Das ist nach 5. möglich. Dann ist $\mathfrak{G} = \text{grp}\,(E_1, E_2, \ldots, E_n)$. Besteht eine Gleichung $\Pi E_\nu^{a_\nu} = \Pi E_\nu^{b_\nu}$, so ist $\Pi E_\nu^{a_\nu - b_\nu} = \mathfrak{E}$. Daraus schließt man:

$$E_n^{a_n - b_n} = \mathfrak{E}, \quad E_{n-1}^{a_{n-1} - b_{n-1}} = \mathfrak{E}, \quad \ldots, \quad E_1^{a_1 - b_1} = \mathfrak{E}.$$

Damit ist der Beweis, der noch auf mannigfache Art modifiziert werden kann, vollendet. Weder die Elemente E_ν, noch die durch sie erzeugten Gruppen sind eindeutig bestimmt. Nur der Typus dieser Gruppen ist, wenn auch nicht völlig, so doch im wesentlichen, durch den Typus von $\mathfrak{G}$ bestimmt. Doch gehe ich darauf hier nicht näher ein.

§ 3.

Daß man nach einer Untergruppe kongruente Elemente nicht als verschieden ansieht, kommt darauf hinaus, daß man die Mengen aller zu einem Element nach einer Untergruppe kongruenten Elemente als neue Elemente einführt. Diese Mengen, zu denen ja als spezielle Fälle die Untergruppen und die Elemente selbst gehören, werden den Hauptgegenstand der folgenden Untersuchungen bilden. Ich will diese Mengen deshalb hier ganz unabhängig definieren. Unter die Definition, die ich jetzt gebe, fallen

z. B. alle inhomogenen linearen Scharen und die Parallelprojektionen einer festen Ebene auf eine zweite zu ihr parallele Ebene.

Eine Menge von Elementen $A, B, \ldots$ soll eine *Schar* heißen, wenn je drei Elementen A, B, C ein viertes Element der Menge, das ich als das Produkt $AB^{-1}C$ bezeichne, so zugeordnet ist, daß stets

$$AB^{-1}B = A$$

ist, daß ferner das kommutative Gesetz

$$AB^{-1}C = CB^{-1}A$$

und das assoziative Gesetz

$$(AB^{-1}C)D^{-1}E = AB^{-1}(CD^{-1}E)$$

gilt. Daß auch

$$A(BC^{-1}D)^{-1}E = (AB^{-1}C)D^{-1}E$$

wird, läßt sich beweisen.

Wenn man will, kann man, ohne Vieldeutigkeiten befürchten zu müssen, jede Vertauschung der Faktoren eines Produktes vornehmen, gleiche Faktoren zu Potenzen zusammenfassen und mit diesen nach den gewöhnlichen Regeln rechnen. Der Ausdruck $\Pi E_\nu^{e_\nu}$, in dem die E_ν Elemente einer Schar bedeuten, ist dann und nur dann erklärt, wenn $\Sigma e_\nu = 1$ ist.

Ist jedes Element der Schar F zugleich Element der Schar G, so soll F eine *Unterschar* von G, G eine *Oberschar* von F heißen. Ich schreibe dann $F \leqq G$ und $G \geqq F$. Haben die endlich oder unendlich vielen Unterscharen $F_1, F_2, \ldots$ einer Schar G überhaupt gemeinsame Elemente, so bilden diese eine Schar, den *Durchschnitt*

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = F_1 \times F_2 \times \ldots$$

der Scharen F_α. Daraus ergibt sich: Zu jeder Menge von Scharen $F_1, F_2, \ldots$ aus G gehört eine kleinste Schar, welche alle F_α enthält, die *Vereinigungsschar* der F_α.

Unter dem *Produkt*

$$F_1 F_2^{-1} F_3 F_4^{-1} \ldots F_{2n-1}$$

aus einer ungeraden Anzahl von Unterscharen einer Schar G verstehe ich die Unterschar von G, die von den Elementen

$$E_1 E_2^{-1} E_3 E_4^{-1} \ldots E_{2n-1}$$

gebildet wird, wenn E_ν alle Elemente von F_ν durchläuft. Insbesondere ist $F = AA^{-1}F$ für jedes Element A von G und

$$F = AB^{-1}F = AF^{-1}F = FA^{-1}F = FF^{-1}F$$

für alle Elemente von F.

Zwei Unterscharen F und G einer Schar haben dann und nur dann gemeinsame Elemente, wenn die Scharen $FG^{-1}G$ und $GF^{-1}F$ gleich sind. Denn ist D ein gemeinsames Element von F und G, so hat man

$$FG^{-1}G = FG^{-1}(GD^{-1}G) = FD^{-1}G = (FD^{-1}F)F^{-1}G = FF^{-1}G.$$

Ist umgekehrt $FG^{-1}G = GF^{-1}F$, so bestehen zwischen Elementen $A_\nu \leqq F$ und $B_\nu \leqq G$ Gleichungen

$$A_1 B_2^{-1} B_3 = B_1 A_2^{-1} A_3.$$

Dann ist aber

$$A_1 A_3^{-1} A_2 = B_1 B_3^{-1} B_2$$

ein gemeinsames Element von F und G.

§ 4.

Die Unterscharen einer Schar bilden selbst keine Schar. Denn für sie ist zwar das assoziative und kommutative Gesetz der Multiplikation erfüllt, im allgemeinen ist aber $FG^{-1}G > F$. Bestehen für zwei Scharen F und G die Gleichungen $FG^{-1}G = F$ und $GF^{-1}F = G$, so will ich F und G *Nebenscharen* (*voneinander*) nennen. Jede Schar ist Nebenschar von sich selbst. Zwei Scharen sind Nebenscharen voneinander, wenn sie Nebenscharen einer dritten Schar sind. Ich leite noch einige Eigenschaften der Nebenscharen her, die ich jetzt oder später brauche:

1. Zwei Unterscharen F und G einer Schar H sind dann und nur dann Nebenscharen, wenn eine Gleichung $F = AB^{-1}G$ mit Elementen A und B aus H besteht. Denn aus einer solchen Gleichung folgt für jedes Element $A_0 \leqq F$ und $B_0 \leqq G$, daß $AB^{-1}B_0 \leqq F$, also

$$F = A_0(AB^{-1}B_0)^{-1}F = A_0 B_0^{-1}(BA^{-1}F) = A_0 B_0^{-1} G,$$

d. h. $F = FG^{-1}G$ ist. Sind umgekehrt F und G Nebenscharen, so wird für $A \leqq F$ und $B \leqq G$

$$F \geqq AB^{-1}G \geqq AB^{-1}(BA^{-1}F) = F.$$

2. Ist F eine Unterschar von H, so ist jedes Element E von H in einer und nur einer Nebenschar von F enthalten. Denn E ist in $G = EA^{-1}F$ enthalten, wenn $A \leqq F$. Ist E außerdem in der Nebenschar G' von F enthalten, so folgt

$$G' = G'G^{-1}G \geqq EE^{-1}G = G$$

und entsprechend $G \geqq G'$.

3. Ersetzt man in einem Produkt jeden Faktor durch eine seiner Nebenscharen, so ist das neue Produkt eine Nebenschar des alten. Der Beweis ergibt sich sofort aus 1.

4. Ersetzt man in einer Menge von Scharen jede Schar F_α durch eine ihrer Nebenscharen G_α, so sind ΔF_α und ΔG_α Nebenscharen voneinander, vorausgesetzt, daß die Durchschnitte existieren. Denn ist A ein Element von ΔF_α und B ein Element von ΔG_α, so ist $F_\alpha = AB^{-1}G_\alpha$, folglich $\Delta F_\alpha \geqq AB^{-1}\Delta G_\alpha$ und entsprechend $\Delta G_\alpha \geqq BA^{-1}\Delta F_\alpha$.

Für Vereinigungsscharen gilt kein entsprechender Satz.

Enthält die Schar G eine Nebenschar von F, so bilden die Nebenscharen von F in G eine Schar G/F, das *Komplement* zu F in G. Nach 2. ist nur dann $G/F = H/F$, wenn $G = H$. Für $G \leqq H$ ist G/F eine Unterschar von H/F. Ist umgekehrt G^* eine Unterschar von H/F, so bilden die in den Elementen von G^* enthaltenen Elemente von H eine Schar $G \leqq H$, die Oberschar einer Nebenschar von F ist, so daß also $G^* = G/F$ wird. Besteht zwischen Unterscharen G_α/F von H/F eine der oben definierten Beziehungen, so besteht dieselbe Beziehung zwischen den Unterscharen G_α von H. Umgekehrt zieht jede Relation zwischen Oberscharen G_α von Nebenscharen von F die entsprechende Relation zwischen den Scharen G_α/F nach sich.

§ 5.

Zwei Scharen heißen *isomorph*, wenn man ihre Elemente einander eineindeutig so zuordnen kann, daß, wenn A, B, C und A', B', C' entsprechende Elemente sind, auch $AB^{-1}C$ und $A'B'^{-1}C'$ aufeinander abgebildet werden. Eine solche Abbildung einer Schar G auf sich selbst erhält man, wenn man dem Elemente E das Element $AB^{-1}E$ zuordnet, wobei A und B feste Elemente von G bedeuten. Dabei geht B in A über. Das zeigt, daß die Elemente einer Schar sich durch keine abstrakt definierbare Eigenschaft unterscheiden können. Da eine Unterschar F von G in ihre Nebenschar $AB^{-1}F$ übergeht, folgt noch: Nebenscharen sind zueinander isomorph. Insbesondere enthalten sie gleich viel Elemente.

Zeichnet man in einer Schar $\mathfrak{G}$ ein Element $\mathfrak{E}$ aus und nennt man $A\mathfrak{E}^{-1}B$ das Produkt $A \cdot B$ der Elemente A und B, so erhält man eine Gruppe mit dem Einheitselement $\mathfrak{E}$. Das Scharenelement $AB^{-1}C$ wird dabei die Lösung der Gleichung $A \cdot C = B \cdot X$. Da alle Elemente einer Schar gleichwertig sind, erhält man aus isomorphen Scharen stets Gruppen von gleichem Typus. Umgekehrt kann jede Gruppe auf eine und nur eine Art aus einer Schar erhalten werden. Das folgt daraus, daß die Zuordnung des Elementes $A \cdot B^{-1} \cdot C$ zu den Gruppenelementen A, B, C durch die Gruppenoperation den Bedingungen des § 3 genügt, daß also jede Gruppe selbst eine Schar ist.

Eine Unterschar der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist, auf Grund der Auszeichnung des Elementes $\mathfrak{E}$, dann und nur dann eine Gruppe, eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$,

wenn $\mathfrak{E}$ in ihr enthalten ist. Dehnt man die obige Produktdefinition von den Elementen auf die Unterscharen von $\mathfrak{G}$ aus, so ist jede Schar $F \leqq \mathfrak{G}$ in der Form $F = E \cdot \mathfrak{F}$ darstellbar, wo E ein Element von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ eine durch F eindeutig bestimmte Untergruppe ist. Denn zwei Unterscharen F und F' von $\mathfrak{G}$ sind Nebenscharen, wenn eine Gleichung $F = E \cdot F'$ besteht, und weiter gibt es eine einzige Nebenschar $\mathfrak{F}$ von F, die $\mathfrak{E}$ enthält. Die Nebenscharen von $\mathfrak{F}$ sind die Mengen der nach $\mathfrak{F}$ untereinander kongruenten Elemente von $\mathfrak{G}$[4]). Das Komplement $\mathfrak{G}/F = \mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ ist eine Gruppe mit dem Einheitselement $\mathfrak{F}$.

Die Potenzen einer Unterschar F von $\mathfrak{G}$ habe ich nicht besonders definiert. Sie sind daher nur als Elemente von $\mathfrak{G}/F$ erklärt. Ist E ein Element von F, so ist F^r demnach die Nebenschar von F, die E^r enthält, nicht aber die Schar, die nur aus den Elementen E^r besteht.

Sind a und b zwei ganze rationale Zahlen mit dem größten gemeinsamen Teiler d und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen m, so liefert das Kriterium für die Existenz des Durchschnitts zweier Scharen in § 3 den bekannten Satz: Die Kongruenzen

$$x \equiv a' \,(\mathrm{mod}\, a), \qquad x \equiv b' \,(\mathrm{mod}\, b)$$

haben dann und nur dann eine gemeinsame Lösung, wenn $a' \equiv b' \,(\mathrm{mod}\, d)$ ist. Die Lösung ist nach § 4, 4. genau $\mathrm{mod}\, m$ bestimmt.

§ 6.

Die Vereinigungsschar von Untergruppen $\mathfrak{F}_\nu$ einer Gruppe $\mathfrak{H}$ ist eine Gruppe $\mathfrak{G}$. Im Falle endlich vieler $\mathfrak{F}_\nu$ wird $\mathfrak{G} = \Pi \mathfrak{F}_\nu$. Ist jedes Element von $\mathfrak{G}$ nur auf eine Weise als Produkt je eines Elementes der Gruppen $\mathfrak{F}_\nu$ darstellbar, so nennt man die $\mathfrak{F}_\nu$ (*voneinander*) *unabhängige Untergruppen* von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ das *direkte Produkt* der *direkten Faktoren* $\mathfrak{F}_\nu$. Sind die Gruppen $\mathfrak{F}_\nu$ unabhängig, so ist der Typus von $\Pi \mathfrak{F}_\nu$ durch die Typen der $\mathfrak{F}_\nu$ allein eindeutig bestimmt. In § 2 wurde für eine spezielle Klasse von Gruppen die Zerlegbarkeit in direkte Faktoren einfacher Art bewiesen. Ich leite zwei Kriterien für die Unabhängigkeit von Gruppen her:

1. *Die Gruppen* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ *sind dann und nur dann unabhängig, wenn der Durchschnitt aller Produkte von je* $n-1$ *der Gruppen nur aus dem Einheitselement besteht.*

2. *Die Gruppen* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n$ *sind dann und nur dann unabhängig, wenn das distributive Gesetz*

$$\underset{\lambda}{\Delta} \underset{\varkappa}{\Pi} F_{\varkappa\lambda} = \underset{\varkappa}{\Pi} \underset{\lambda}{\Delta} F_{\varkappa\lambda}$$

[4]) Die meist gebräuchliche, aber unglücklich gewählte Bezeichnung ist: Nebengruppen von $\mathfrak{F}$.

für alle Scharen $F_{\varkappa\lambda} \leqq \mathfrak{F}_\varkappa$ *gilt, sobald eine der beiden Gleichungsseiten einen Sinn hat.*

Beweis. Sind $E = \Pi E_\varkappa$ und $E = \Pi E'_\varkappa$ zwei verschiedene Darstellungen des Elementes E von $\Pi \mathfrak{F}_\varkappa$ als Produkt von Elementen der Gruppen $\mathfrak{F}_\varkappa$ und ist etwa $E_1 \neq E'_1$, so ist

$$E_1^{-1} E'_1 = E_2^{-1} E'_2 E_3^{-1} E'_3 \dots E_n^{-1} E'_n$$

sowohl in $\mathfrak{F}_2 \cdot \mathfrak{F}_3 \dots \mathfrak{F}_n$ als auch in $\mathfrak{F}_1$, also in allen Gruppen $\prod_{\varkappa \neq \lambda} \mathfrak{F}_\varkappa$ enthalten. Daher ist die 1. Bedingung hinreichend. — Ist E ein Element von $\Delta_\lambda \Pi_\varkappa F_{\varkappa\lambda}$, so besteht für jedes λ eine Gleichung $E = \Pi_\varkappa E_{\varkappa\lambda}$ mit $E_{\varkappa\lambda} \leqq F_{\varkappa\lambda}$. Sind die Gruppen $\mathfrak{F}_\varkappa$ unabhängig, so ist E auf eine einzige Weise als das Produkt von Elementen $E_\varkappa \leqq \mathfrak{F}_\varkappa$ darstellbar, so daß also $E_{\varkappa\lambda} = E_\varkappa$ wird. Daraus folgt die Existenz von $\Delta_\lambda F_{\varkappa\lambda}$ für jedes $\varkappa$ und $E \leqq \Pi \Delta F_{\varkappa\lambda}$, mithin

$$\Delta \Pi F_{\varkappa\lambda} \leqq \Pi \Delta F_{\varkappa\lambda}.$$

Für beliebige Scharen $F_{\varkappa\lambda}$ ist aber

$$\Delta \Pi F_{\varkappa\lambda} \geqq \Pi \Delta F_{\varkappa\lambda},$$

sobald alle $\Delta F_{\varkappa\lambda}$ existieren. Daher ist die 2. Bedingung notwendig. — Daß 1. notwendig ist, folgt aus 2., daß 2. hinreichend ist, aus 1., wenn man $F_{\varkappa\lambda} = \mathfrak{F}_\varkappa$ setzt, solange $\varkappa \neq \lambda$, und für $F_{\varkappa\varkappa}$ das Einheitselement nimmt.

Sind $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ voneinander unabhängige Gruppen, so ist in jeder Nebenschar von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{G}$ genau ein Element von $\mathfrak{G}$ enthalten. Daraus schließt man, daß die Gruppen $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{G} / \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ isomorph sind. Mit andern Worten: *Für zwei Untergruppen* $\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{G}$ *derselben Gruppe sind die Gruppen* $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{G} / \mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{G} / \mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ *stets isomorph.*

Der Dualismus zwischen Produkt und Durchschnitt, der sich in diesem Satze zeigt, geht weiter.

Ist $\mathfrak{F}$ der Durchschnitt von Untergruppen $\mathfrak{G}_\nu$ einer Gruppe $\mathfrak{H}$ und ist F ein Element von $\mathfrak{H} / \mathfrak{F}$, so ist $F = \Delta F \mathfrak{G}_\nu$. Jedes Element von $\mathfrak{H} / \mathfrak{F}$ ist also der Durchschnitt einer Menge von Scharen, die aus je einem Element jeder der Gruppen $\mathfrak{H} / \mathfrak{G}_\nu$ besteht. Da F nur in einer Nebenschar von $\mathfrak{G}_\nu$ enthalten ist, ist diese Darstellung von F eindeutig. Umgekehrt ist der Durchschnitt je eines Elementes aus jedem Komplement $\mathfrak{H} / \mathfrak{G}_\nu$ — vorausgesetzt, daß er existiert — eine Nebenschar von $\Delta \mathfrak{G}_\nu$, also ein Element von $\mathfrak{H} / \mathfrak{F}$. Ich nenne deshalb $\mathfrak{H} / \mathfrak{F}$ den *Durchschnitt der Gruppen* $\mathfrak{H} / \mathfrak{G}_\nu$. Ich beschränke mich jetzt auf den Fall endlich vieler $\mathfrak{G}_\nu$. Existiert dann der Durchschnitt einer Menge von Scharen, die aus je einem Element jeder der Gruppen $\mathfrak{H} / \mathfrak{G}_\nu$ besteht, stets, so nenne ich die $\mathfrak{H} / \mathfrak{G}_\nu$ (*von*

einander) unabhängige Komplemente in $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}/\mathfrak{F}$ den *direkten Durchschnitt* der Gruppen $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}_\nu$. Sind die Gruppen $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}_\nu$ unabhängig, so ist der Typus von $\mathfrak{H}/\Delta\mathfrak{G}_\nu$ durch die Typen der $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}_\nu$ allein eindeutig bestimmt. Ich leite zwei Kriterien für die Unabhängigkeit von Komplementen her:

1. *Die Gruppen* $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}/\mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{H}/\mathfrak{G}_n$ *sind dann und nur dann unabhängig, wenn das Produkt aller Durchschnitte von je* $n-1$ *der Gruppen gleich* $\mathfrak{H}$ *ist.*

2. *Die Gruppen* $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}/\mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{H}/\mathfrak{G}_n$ *sind dann und nur dann unabhängig, wenn das distributive Gesetz*

$$\prod_\varkappa \Delta_\lambda G_{\varkappa\lambda} = \Delta_\lambda \prod_\varkappa G_{\varkappa\lambda}$$

für alle Scharen, für welche $G_{\varkappa\lambda}/\mathfrak{G}_\lambda \leqq \mathfrak{H}/\mathfrak{G}_\lambda$, *gilt, sobald eine der beiden Gleichungsseiten einen Sinn hat.*

Beweis. Setzt man $\Delta_{\lambda \neq \varkappa} \mathfrak{G}_\lambda = \mathfrak{F}_\varkappa$ und ist $\Pi \mathfrak{F}_\varkappa = \mathfrak{H}$, so erhält man alle Elemente von $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}_\varkappa$ in der Form $E_\varkappa \mathfrak{G}_\varkappa$, wenn man $E_\varkappa$ alle Elemente von $\mathfrak{F}_\varkappa$ durchlaufen läßt. Denn jedes Element von $\mathfrak{H}$ läßt sich in der Form $\Pi E_\varkappa$ darstellen. Der Durchschnitt von Scharen $E_\varkappa \mathfrak{G}_\varkappa$ ist aber stets vorhanden, da $\Pi E_\varkappa \leqq \Delta E_\varkappa \mathfrak{G}_\varkappa$. Daher ist die 1. Bedingung hinreichend. — Ist E ein Element von $\Delta_\lambda \Pi G_{\varkappa\lambda}$, so ist E für jedes λ das Produkt je eines Elementes $E_{\varkappa\lambda} \leqq G_{\varkappa\lambda}$. Sind die Gruppen $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}_\lambda$ unabhängig, so enthalten die Scharen $E_{\varkappa\lambda}\mathfrak{G}_\lambda$ für jedes $\varkappa$ ein gemeinsames Element $E_\varkappa$. Die Scharen $\Delta\Pi E_\varkappa \mathfrak{G}_\lambda$ und $\Pi\Delta E_\varkappa \mathfrak{G}_\lambda$ stimmen aber, als Nebenscharen von $\Delta\mathfrak{G}_\lambda$, die beide $\Pi E_\varkappa$ enthalten, überein. Man hat also

$$E \leqq \Delta\Pi E_\varkappa \mathfrak{G}_\lambda = \Pi\Delta E_\varkappa \mathfrak{G}_\lambda = \Pi\Delta E_{\varkappa\lambda}\mathfrak{G}_\lambda \leqq \Pi\Delta G_{\varkappa\lambda}.$$

Daher ist die 2. Bedingung notwendig. — Daß 1. notwendig ist, folgt aus 2., daß 2. hinreichend ist, aus 1., wenn man $G_{\varkappa\lambda} = \mathfrak{G}_\lambda$ für $\varkappa \neq \lambda$ und $G_{\lambda\lambda} = \mathfrak{H}$ setzt.

Aus den bewiesenen Kriterien folgt nun sofort, daß man die eine Art von Zerlegungen einer Gruppe $\mathfrak{H}$ auf die andere zurückführen kann. *Die Systeme von* n *unabhängigen Untergruppen, deren direktes Produkt* $\mathfrak{H}$ *ist, und die Systeme von* n *unabhängigen Komplementen, deren direkter Durchschnitt* $\mathfrak{H}$ *ist, lassen sich einander eineindeutig so zuordnen, daß, wenn* $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$ *und* $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{H}/\mathfrak{G}_n$ *entsprechende Systeme sind, die Gleichungen*

$$\prod_{\varkappa \neq \lambda} \mathfrak{F}_\varkappa = \mathfrak{G}_\lambda, \qquad \Delta_{\lambda \neq \varkappa} \mathfrak{G}_\lambda = \mathfrak{F}_\varkappa$$

bestehen. Da $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}_\nu$ zu $\mathfrak{F}_\nu$ isomorph wird, folgt weiter: *Das direkte Produkt und der direkte Durchschnitt von Gruppen, die paarweise zueinander isomorph sind, haben denselben Typus.*

§ 7.

Der Begriff des direkten Produktes läßt eine Erweiterung auf unendlich viele Faktoren zu. Die Vereinigungsgruppe $\mathfrak{G}$ von Untergruppen $\mathfrak{F}_\alpha$ einer Gruppe soll das *uneigentliche direkte Produkt* der $\mathfrak{F}_\alpha$ heißen, wenn jedes Element von $\mathfrak{G}$, bis auf Faktoren, welche gleich dem Einheitselement $\mathfrak{E}$ sind, nur auf eine Weise als Produkt von Elementen aus verschiedenen Gruppen $\mathfrak{F}_\alpha$ darstellbar ist, wenn also je endlich viele der Gruppen $\mathfrak{F}_\alpha$ unabhängig sind. Der Typus eines uneigentlichen direkten Produktes wird durch die Typen der Faktoren eindeutig bestimmt. Jeder uneigentliche direkte Faktor einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ist auch ein eigentlicher direkter Faktor von $\mathfrak{G}$.

Eine Gruppe, die kein Element der Ordnung 0 enthält, läßt sich auf eine und nur eine Weise als das uneigentliche direkte Produkt von primären Gruppen darstellen, von denen zu jeder Primzahl genau eine gehört[5]).

Dabei heißt $\mathfrak{G}$ eine *zur Primzahl p gehörige primäre Gruppe*, wenn die Ordnung jedes Elementes von $\mathfrak{G}$ eine Potenz von p ist.

Der Beweis ergibt sich aus den beiden folgenden Bemerkungen:

1. Ist a die Ordnung von A, b die Ordnung von B, und sind a und b teilerfremd, so folgt aus $A^{a'} = B^{b'}$, daß $A^{a'} = \mathfrak{E}$ ist. Denn es ist $A^{a'b} = B^{b'b} = \mathfrak{E}$. Daher ist die Ordnung von $A \cdot B$ gleich $a \cdot b$.

2. Ist ab die Ordnung von C und sind a und b teilerfremd, so ist C das Produkt eines Elementes A der Ordnung a mit einem Element B der Ordnung b. Man braucht nur $A = C^{br}$ und $B = C^{as}$ zu setzen, wenn $br + as = 1$.

Sei nun $\mathfrak{G}$ eine Gruppe ohne ein Element der Ordnung 0 und $\mathfrak{G}_p$ die Gruppe der Elemente von $\mathfrak{G}$, welche Potenzen der Primzahl p zur Ordnung haben. Dann ist $\mathfrak{G}$ nach 2. die Vereinigungsgruppe der $\mathfrak{G}_p$. Nach 1. sind alle, sich nicht nur um Faktoren $\mathfrak{E}$ unterscheidende, Produkte von Elementen aus verschiedenen Gruppen $\mathfrak{G}_p$ voneinander verschieden. Daraus folgt, daß $\mathfrak{G}$ das uneigentliche direkte Produkt der $\mathfrak{G}_p$, nicht aber die Vereinigungsgruppe irgendwelcher Untergruppen der $\mathfrak{G}_p$ ist.

Ist $\mathfrak{F}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und hat $\mathfrak{F}_p$ für $\mathfrak{F}$ dieselbe Bedeutung wie $\mathfrak{G}_p$ für $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{F}_p \leqq \mathfrak{G}_p$. Jede Untergruppe von $\mathfrak{G}$ läßt sich also auf eine und nur eine Weise als das uneigentliche direkte Produkt von Untergruppen der direkten Faktoren von $\mathfrak{G}$ darstellen. Bemerkenswert ist hieran nicht die Eindeutigkeit der Darstellung. Daß es mehrere Darstellungen für eine Untergruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$ nicht geben kann, ergibt sich

[5]) Die Verallgemeinerung des bekannten Satzes über endliche Abelsche Gruppen. Vgl. § 1 der Levischen Schrift.

vielmehr sofort aus dem Begriff des direkten Produktes. Aber im allgemeinen wird bei jeder Zerlegung einer Gruppe $\mathfrak{G}$ in direkte Faktoren nicht für jede Untergruppe von $\mathfrak{G}$ eine solche Darstellung existieren. Es läßt sich sogar zeigen, daß die hier betrachtete Zerlegung und die aus ihr durch Zusammenfassung von Faktoren abgeleiteten die einzigen mit dieser Eigenschaft sind.

§ 8.

Die *Ordnung eines Elementes* A einer Gruppe $\mathfrak{G}$ war schon in § 2 eingeführt worden. Ich will auch direkt den Modul der Zahlen a, für welche A^a gleich dem Einheitselement $\mathfrak{E}$ wird, als Ordnung von A bezeichnen. Hat A_ν die Ordnung $\mathfrak{a}_\nu$, so ist die Ordnung von ΠA_ν ein Obermodul von $\Delta \mathfrak{a}_\nu$. Sie ist genau gleich $\Delta \mathfrak{a}_\nu$, wenn $A_\nu \leqq \mathfrak{F}_\nu$ und $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt der $\mathfrak{F}_\nu$ ist. Aus $(\Pi A_\nu)^a = \mathfrak{E}$ folgt dann nämlich $A_\nu^a = \mathfrak{E}$.

Ist F eine Unterschar von $\mathfrak{G}$, so bilden die ganzen Zahlen e, für welche wenigstens bei einem Element von F die e-te Potenz gleich $\mathfrak{E}$ ist, einen Modul $\mathfrak{e}$. Denn haben die Elemente A und B von F die Ordnungen a und b, ist ferner d der größte gemeinsame Teiler von a und b und

$$s \equiv 0 \pmod{a:d}, \qquad s \equiv 1 \pmod{b:d},$$

so wird die Ordnung des Elementes $A^s B^{1-s}$ ein Teiler von d. Den Modul $\mathfrak{e}$ nenne ich die *Ordnung der Unterschar* F von $\mathfrak{G}$. Die Ordnung von F ist der Vereinigungsmodul der Ordnungen der Elemente von F.

Die Ordnung der Unterschar F von $\mathfrak{G}$ wird im allgemeinen nur ein Untermodul der Ordnung des Elementes F von $\mathfrak{G}/F$ sein. Ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ ein solches Komplement in $\mathfrak{G}$, für welches jedes seiner Elemente als Element von $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ und als Unterschar von $\mathfrak{G}$ dieselbe Ordnung hat, so heißt $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ ein *Servanzkomplement* in $\mathfrak{G}$. Mit andern Worten: Die Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ heißt ein Servanzkomplement in $\mathfrak{G}$, wenn in jeder Nebenschar F von $\mathfrak{F}$ ein Element E enthalten ist, für welches $E^r = \mathfrak{E}$ wird, wenn $F^r = \mathfrak{F}$ ist.

Potenzen von Gruppenelementen mit gebrochenen Exponenten führt man zweckmäßig nicht ein, weil diese im allgemeinen nicht eindeutig wären. Doch wird eine wichtige Eigenschaft eines Elementes A durch die Menge der rationalen Zahlen α definiert, für welche man überhaupt Potenzen A^α erklären könnte. Aus § 2, 1. folgt: Für jedes Element A einer Gruppe $\mathfrak{G}$ bilden die rationalen Zahlen $a:b$, für welche, wenn a und b teilerfremd sind, die Gleichung $A^a = X^b$ in $\mathfrak{G}$ eine Lösung besitzt, einen Modul. Dieser ist ein Obermodul von mod 1. Er wird von mir als die *Höhe* des Elementes A in $\mathfrak{G}$ bezeichnet.

Hat A_ν die Höhe $\mathfrak{a}_\nu$, so ist die Höhe von ΠA_ν ein Obermodul von $\Delta \mathfrak{a}_\nu$. Sie ist genau gleich $\Delta \mathfrak{a}_\nu$, wenn A_ν einer Untergruppe $\mathfrak{F}_\nu$ von $\mathfrak{G}$

angehört und $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt der $\mathfrak{F}_\nu$ ist. Dann folgt nämlich aus $(\Pi A_\nu)^a = (\Pi B_\nu)^b$, wenn $B_\nu \leqq \mathfrak{F}_\nu$ sein soll, daß $A_\nu^a = B_\nu^b$ ist.

Die Höhe eines Gruppenelementes E hängt davon ab, als Element welcher Gruppe E betrachtet wird. Ist $E < \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F} \leqq \mathfrak{G}$, so ist die Höhe von E in $\mathfrak{F}$ ein Untermodul der Höhe von E in $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{F}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, in der jedes ihrer Elemente dieselbe Höhe wie in $\mathfrak{G}$ hat, so heißt $\mathfrak{F}$ eine *Servanzuntergruppe* von $\mathfrak{G}$. Mit andern Worten: Die Untergruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$ heißt eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{G}$, wenn für jedes Element E von $\mathfrak{F}$ jede Gleichung $X^r = E$ entweder in $\mathfrak{F}$ lösbar oder in $\mathfrak{G}$ unlösbar ist.

Zwischen den Servanzuntergruppen und den Servanzkomplementen besteht ein einfacher Zusammenhang:

1. *Ist $\mathfrak{F}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ ein Servanzkomplement in $\mathfrak{G}$.*

Der Satz wird durch § 2, 5. bewiesen. Entsprechend ergibt sich:

2. *Ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ ein Servanzkomplement in $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{F}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{G}$.*

Weiter folgt sofort:

Jeder direkte Faktor einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ist eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{G}$.

§ 9.

Vom letztgenannten Satz wird die Umkehrung für den Fall, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ durch endlich viele Elemente erzeugt wird, durch § 2 mitbewiesen. Man hat in V. für $\mathfrak{F}_0$ nur eine beliebige Servanzuntergruppe von $\mathfrak{G}$ zu wählen. Der dortige Beweis liefert sogar den allgemeineren Satz:

Ist $\mathfrak{F}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{G}$ und wird $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ durch endlich viele Elemente erzeugt, so ist $\mathfrak{F}$ ein direkter Faktor von $\mathfrak{G}$.

Ich mache von diesem Satze eine Anwendung.

Ist $\mathfrak{F}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{G}$ und genügen n Nebenscharen F_ν von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}$ dem Gleichungssystem

$$\prod_\nu F_\nu^{a_{\mu\nu}} = F,$$

dann kann man aus jeder Schar F_ν ein Element E_ν so auswählen, daß die Gleichungen

$$\prod_\nu E_\nu^{a_{\mu\nu}} = \mathfrak{E}$$

bestehen, wenn $\mathfrak{E}$ das Einheitselement von $\mathfrak{G}$ ist.

Beweis. Setzt man $\mathrm{grp}(F_1, F_2, \ldots) = \mathfrak{G}'/\mathfrak{F}$, so ist $\mathfrak{F}$ auch eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{G}'$. Nach dem soeben bewiesenen Satze ist $\mathfrak{G}'$

das direkte Produkt von $\mathfrak{F}$ mit einer Gruppe $\mathfrak{F}'$. Man braucht daher nur für E_ν das in F_ν enthaltene Element von $\mathfrak{F}'$ zu wählen.

Ist $\mathfrak{F}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{G}$ und ist, für Elemente A_μ von $\mathfrak{F}$, das Gleichungssystem

$$\prod_\nu X_\nu^{a_{\mu\nu}} = A_\mu$$

durch Elemente von $\mathfrak{G}$ lösbar, so ist es auch durch Elemente von $\mathfrak{F}$ lösbar.

Beweis. Bestehen die Gleichungen $\Pi B_\nu^{a_{\mu\nu}} = A_\mu$ für Elemente B_ν von $\mathfrak{G}$, so ist $\Pi(B_\nu \cdot \mathfrak{F})^{a_{\mu\nu}} = \mathfrak{F}$. Nach dem obigen Satze kann man $C_\nu < B_\nu \cdot \mathfrak{F}$ so bestimmen, daß $\Pi C_\nu^{a_{\mu\nu}} = \mathfrak{E}$ wird. Dann ist aber $B_\nu C_\nu^{-1} < \mathfrak{F}$ und $\Pi(B_\nu C_\nu^{-1})^{a_{\mu\nu}} = A_\mu$.

§ 10.

Ich füge hier noch eine Bestimmung der Menge der Lösungen eines Gleichungssystems

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=n} X_\nu^{a_{\mu\nu}} = A_\mu$$

in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ein. Die Systeme

$$(E_1, E_2, \ldots, E_n) = (E_\nu)$$

von n Elementen aus $\mathfrak{G}$ bilden eine Gruppe $\mathfrak{S}$, wenn man

$$(E_\nu) \cdot (E'_\nu) = (E_\nu \cdot E'_\nu)$$

setzt. Gibt es überhaupt Lösungssysteme der vorgelegten Gleichungen, so bilden diese eine Schar $R \leqq \mathfrak{S}$. Dabei ist R eine Nebenschar der Gruppe $\mathfrak{R}$ der Lösungen des Gleichungssystems $\Pi X_\nu^{a_{\mu\nu}} = \mathfrak{E}$, wenn $\mathfrak{E}$ das Einheitselement von $\mathfrak{G}$.

Die Gruppe der Lösungssysteme der Gleichungen

$$\prod_\nu X_\nu^{a_{\mu\nu}} = \mathfrak{E}$$

in der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist das direkte Produkt von Gruppen $\mathfrak{R}_\varkappa$, die zu den Untergruppen $\mathfrak{F}_\varkappa$ von $\mathfrak{G}$, welche aus den Lösungen gewisser Gleichungen $X^{e_\varkappa} = \mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$ bestehen, isomorph sind. Die Zahlen $e_\varkappa$ hängen nur von den Exponenten $a_{\mu\nu}$, nicht von $\mathfrak{G}$ ab.

Die $e_\varkappa$ bestimmen sich so: Aus dem Modul der ganzen Zahlen gehe auf die beschriebene Art durch Bildung von Systemen von n Elementen die Gruppe $\mathfrak{Z}$ hervor. Die durch die Systeme

$$(a_{\mu 1}, a_{\mu 2}, \ldots, a_{\mu n}) = (a_{\mu\nu})$$

erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{Z}$ sei $\mathfrak{A}$. Versteht man unter $\delta_{\varkappa\lambda}$ den Wert 1, wenn $\varkappa = \lambda$, sonst den Wert 0, so wird $\mathfrak{Z}/\mathfrak{A}$ durch die n Elemente $C_\lambda = (\delta_{\lambda\nu})\cdot\mathfrak{A}$ erzeugt. Nach § 2 ist $\mathfrak{Z}/\mathfrak{A}$ das direkte Produkt einer Anzahl, k, von Gruppen, die durch je ein Element $B_\varkappa = (b_{\varkappa\nu})\cdot\mathfrak{A}$ erzeugt werden. Es soll $e_\varkappa$ die Ordnung von $B_\varkappa$ sein.

Weiter sei $\bar{\mathfrak{Z}}$ die Gruppe der Systeme von k ganzen Zahlen, $\bar{\mathfrak{A}}$ die durch die Elemente $(e_\varkappa\delta_{\varkappa\lambda})$ erzeugte Untergruppe von $\bar{\mathfrak{Z}}$ und $\bar{B}_\lambda = (\delta_{\varkappa\lambda})\cdot\bar{\mathfrak{A}}$. Dann ist $\bar{\mathfrak{Z}}/\bar{\mathfrak{A}}$ zu $\mathfrak{Z}/\mathfrak{A}$ isomorph, und zwar kann man $B_\varkappa$ und $\bar{B}_\varkappa$ als entsprechende Elemente betrachten. Den Elementen C_ν entsprechen dabei gewisse Elemente $\bar{C}_\nu = \Pi\bar{B}_\varkappa^{c_{\varkappa\nu}}$ von $\bar{\mathfrak{Z}}/\bar{\mathfrak{A}}$. Aus der isomorphen Beziehung ergibt sich dann:

$$(\sum_\nu a_{\mu\nu}c_{\varkappa\nu}) \leqq \bar{\mathfrak{A}}, \qquad (\sum_\nu b_{\lambda\nu}c_{\varkappa\nu} - \delta_{\varkappa\lambda}) \leqq \bar{\mathfrak{A}}.$$

Bestehen nun, für n Elemente E_ν von $\mathfrak{G}$, die Gleichungen $\Pi E_\nu^{a_{\mu\nu}} = \mathfrak{E}$, so ist stets $\Pi E_\nu^{a_\nu} = \mathfrak{E}$, wenn $(a_\nu) \prec \mathfrak{A}$. Man setze $\bar{E}_\varkappa = \Pi E_\nu^{b_{\varkappa\nu}}$. Dann wird

$$\bar{E}_\varkappa^{e_\varkappa} = \Pi_\nu E_\nu^{b_{\varkappa\nu}e_\varkappa} = \mathfrak{E}.$$

Führen zwei Lösungssysteme (E_ν) und (E'_ν) der vorgelegten Gleichungen zu denselben $\bar{E}_\varkappa$, so ist

$$\Pi(E_\nu^{-1}E'_\nu)^{a_{\mu\nu}} = \mathfrak{E}, \qquad \Pi(E_\nu^{-1}E'_\nu)^{b_{\varkappa\nu}} = \mathfrak{E}.$$

Da die Systeme $(a_{\mu\nu})$ und $(b_{\varkappa\nu})$ zusammen die ganze Gruppe $\mathfrak{Z}$ erzeugen, folgt hieraus $E_\nu = E'_\nu$. Gelten endlich, für k Elemente $\bar{E}_\varkappa$ von $\mathfrak{G}$, die Gleichungen $\bar{E}_\varkappa^{e_\varkappa} = \mathfrak{E}$, so setze man $E_\nu = \Pi\bar{E}_\varkappa^{c_{\varkappa\nu}}$. Dann wird

$$\Pi_\nu E_\nu^{b_{\lambda\nu}} = \Pi_\varkappa \bar{E}_\varkappa^{\sum_\nu b_{\lambda\nu}c_{\varkappa\nu}} = \bar{E}_\lambda$$

und

$$\Pi_\nu E_\nu^{a_{\mu\nu}} = \Pi_\varkappa \bar{E}_\varkappa^{\sum_\nu a_{\mu\nu}c_{\varkappa\nu}} = \mathfrak{E}.$$

Die Lösungen (E_ν) der Gleichungen $\Pi X_\nu^{a_{\mu\nu}} = \mathfrak{E}$ und die Lösungen $(\bar{E}_\varkappa)$ der Gleichungen $X_\varkappa^{e_\varkappa} = \mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$ lassen sich also eineindeutig einander zuordnen. Dabei entspricht dem Produkt zweier Systeme (E_ν) das Produkt der entsprechenden Systeme $(\bar{E}_\varkappa)$. Die Gruppen der (E_ν) und $(\bar{E}_\varkappa)$ sind also isomorph.

Als $e_\varkappa$ kann man die Elementarteiler der Matrix $(a_{\mu\nu})$ nehmen, nachdem man diese, wenn notwendig, durch Hinzufügung von Nullen zu einer n-zeiligen Matrix erweitert hat. Wählt man gemäß § 1 als Exponentenring einen Körper, so wird entweder $\mathfrak{F}_\varkappa = \mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{F}_\varkappa = \mathfrak{G}$. Ist noch $\mathfrak{G}$ die additive Gruppe der Körperelemente, so geht der bewiesene Satz in den bekannten Satz der Determinantentheorie über die Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems über.

§ 11.

Nenne ich $\mathfrak{G}$ eine *kleine Obergruppe* von $\mathfrak{E}$, wenn jede Menge von Gruppen, die zugleich Obergruppen von $\mathfrak{E}$ und Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind, bereits in dem Produkt endlich vieler von ihnen enthalten ist, so wird jede Gruppe, die eine kleine Obergruppe ihres Einheitselementes ist, durch endlich viele ihrer Elemente erzeugt. Die Umkehrung dieses Satzes wird durch § 2, I. bewiesen. Ich stelle jetzt das duale Gegenstück zum Begriff der kleinen Obergruppe auf.

Die Schar F soll eine *große Unterschar* der Schar H heißen, wenn der Durchschnitt jeder Menge von Scharen, die zugleich Oberscharen von F und Unterscharen von H sind, gleich dem Durchschnitt einer endlichen Teilmenge der Scharen ist. Sind $F = \mathfrak{F}$ und $H = \mathfrak{H}$ Gruppen, so nenne ich $\mathfrak{F}$ eine *große Untergruppe* von $\mathfrak{H}$. Eine Unterschar F der Gruppe $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann eine große Unterschar von $\mathfrak{H}$, wenn F^0 eine große Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ist.

1. *Ist $\mathfrak{F}$ eine große Untergruppe von $\mathfrak{H}$ und ist $\mathfrak{H} \geqq \mathfrak{G} \geqq \mathfrak{F}$, so ist $\mathfrak{G}$ eine große Untergruppe von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{F}$ eine große Untergruppe von $\mathfrak{G}$.*

Das folgt sofort aus der Definition. Weiter gilt:

2. *Ist $\mathfrak{F}$ eine große Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}$ eine große Untergruppe von $\mathfrak{H}$, so ist $\mathfrak{F}$ auch eine große Untergruppe von $\mathfrak{H}$.*

Es sei nämlich $\mathfrak{H} \geqq \mathfrak{A}_\alpha \geqq \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{A} = \Delta\, \mathfrak{A}_\alpha$. Dann gibt es endlich viele $\mathfrak{A}_\alpha$, für deren Durchschnitt $\mathfrak{B}$ die Gleichung $\mathfrak{G} \times \mathfrak{A} = \mathfrak{G} \times \mathfrak{B}$ besteht. Da weiter, weil $\mathfrak{B}/\mathfrak{G} \times \mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{B}/\mathfrak{G}$ isomorph ist, $\mathfrak{G} \times \mathfrak{A}$ eine große Untergruppe von $\mathfrak{B}$ wird, gibt es einen Durchschnitt $\mathfrak{C}$ endlich vieler $\mathfrak{A}_\alpha$, für den $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C} = \mathfrak{A}$ wird.

Hieraus folgt weiter:

3. *Der Durchschnitt endlich vieler großer Untergruppen von $\mathfrak{H}$ ist wieder eine große Untergruppe von $\mathfrak{H}$.*

Um die Existenz großer Untergruppen bei beliebigen Gruppen nachzuweisen, führe ich jetzt Gruppen ein, welche den durch ein Element erzeugten Gruppen entsprechen. Enthält jede Untergruppe von $\mathfrak{H}$, außer der aus dem Einheitselement $\mathfrak{E}$ allein bestehenden, das Element $E \neq \mathfrak{E}$, so will ich $\mathfrak{H}$ eine durch das Element E *beherrschte* Gruppe nennen.

Wird $\mathfrak{H}$ durch E beherrscht, so kann $\mathfrak{H}$ kein Element der Ordnung Null besitzen. Man kann daher $\mathfrak{H}$ nach § 7 in direkte Faktoren zerlegen. Weiter kann man jede durch zwei Elemente erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{H}$ nach § 2 zerlegen. Da E in allen Faktoren vorkommen soll, muß ihre Anzahl in beiden Fällen gleich 1 sein. Daraus folgt die Notwendigkeit der Bedingung:

I. *Eine Gruppe wird dann und nur dann durch ein Element beherrscht, wenn sie primär ist und jedes Paar ihrer Elemente in einer von einem Element erzeugten Gruppe enthalten ist.*

Daß die Bedingung hinreichend ist, schließt man daraus, daß je zwei durch ein Element erzeugte Untergruppen von $\mathfrak{H}$ dieselben Elemente von Primzahlordnung haben müssen. Dies ergibt sich aus der folgenden Bemerkung:

Ist die Ordnung p^k von A eine Potenz einer Primzahl, so gibt es in grp A nur eine durch ein Element der Ordnung p^{k-l} erzeugte Untergruppe. Denn wenn a nicht durch p teilbar ist, erzeugen A^{p^l} und A^{ap^l} dieselbe Gruppe.

Aus I. ergibt sich mittels dieser Bemerkung ein zweites Kriterium:

II. *Eine Gruppe wird dann und nur dann durch ein Element beherrscht, wenn sie zu einer primären Gruppe* $\mathfrak{a} \bigm| \mathrm{mod}\, 1$, *wo* $\mathfrak{a}$ *ein Modul, isomorph ist.*

Die Bedeutung der durch ein Element beherrschten Gruppen für beliebige Gruppen beruht auf dem Satze:

III. *Ist E ein Element der Gruppe $\mathfrak{H}$, so gibt es in $\mathfrak{H}$ eine Schar $G \geqq E$, für welche $\mathfrak{H}/G$ durch G beherrscht wird.*

Zum Beweise nehme ich eine Wohlordnung der Elemente von $\mathfrak{H}$ vor. Ist

$$\mathfrak{E} = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_\varrho, \ldots \qquad (0 \leqq \varrho < \tau)$$

die mit dem Einheitselement beginnende wohlgeordnete Menge der Elemente, so definiere ich eine Teilmenge durch transfinite Induktion. Es sei $B_0 = A_0$ uud B_σ das erste Element $A_\varrho \neq B_{\sigma'}$, für welches die Gruppe

$$\mathrm{grp}\,(B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{\sigma'}, \ldots, A_\varrho) \qquad (0 \leqq \sigma' < \sigma)$$

das Element E nicht enthält. Die Elemente B_σ bilden eine größte, E nicht enthaltende Untergruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$. Daher wird $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ durch $E \cdot \mathfrak{G}$ beherrscht.

Aus II. folgt:

4. *Jede Untergruppe von $\mathfrak{H}$, deren Komplement in $\mathfrak{H}$ durch ein Element beherrscht wird, ist eine große Untergruppe von $\mathfrak{H}$.*

Aus III. ergeben sich daher die Sätze:

5. *Jede große Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ist der Durchschnitt von endlich vielen Untergruppen, deren Komplemente in $\mathfrak{H}$ durch je ein Element beherrscht werden.*

6. *Jede Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ist der Durchschnitt von großen Untergruppen von $\mathfrak{H}$.*

§ 12.

Ist das Einheitselement eine große Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{H}$, so ist $\mathfrak{H}$ auf eine einzige Weise als der direkte Durchschnitt endlich vieler primärer, zu verschiedenen Primzahlen gehörigen Gruppen $\mathfrak{H}/\mathfrak{F}_p$ darstellbar. Jede Unterschar von $\mathfrak{H}$ ist der Durchschnitt von Scharen G_p, für welche $G_p/\mathfrak{F}_p \leqq \mathfrak{H}/\mathfrak{F}_p$.

Der Beweis ergibt sich sofort aus § 7 und § 6. Weiter gilt der Satz:

Ist das Einheitselement eine große Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{H}$, so ist $\mathfrak{H}$ der direkte Durchschnitt von Komplementen in $\mathfrak{H}$, die durch je ein Element beherrscht werden.

Ich beweise zunächst zwei Hilfssätze:

1. *Ist A ein Element der Gruppe $\mathfrak{H}$ von Primzahlordnung, so gibt es eine Servanzuntergruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$, deren Komplement durch $A \cdot \mathfrak{G}$ beherrscht wird.*

Beweis. Ist p die Ordnung von A und hat jede Gleichung $X^{p^k} = A$ in $\mathfrak{H}$ eine Lösung, so sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{H}$, für die $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ durch $A \cdot \mathfrak{G}$ beherrscht wird. Ist dagegen l der größte Wert des Exponenten k, für den diese Gleichung lösbar ist, so sei $\mathfrak{G}'$ die Gruppe der p^{l+1}-ten Potenzen der Elemente von $\mathfrak{H}$. Da A nicht in $\mathfrak{G}'$ enthalten ist, gibt es eine Gruppe $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{G}'$, deren Komplement in $\mathfrak{H}$ durch $A \cdot \mathfrak{G}$ beherrscht wird. In beiden Fällen ist $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ ein Servanzkomplement in $\mathfrak{H}$. Es sei nämlich $A_k^{p^k} = A$. Dann hat das Element $A_k \cdot \mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ die Ordnung p^{k+1}. Ferner ist die Gleichung $X^{p^{l+1}} = A \cdot \mathfrak{G}$ durch keine Schar $B \cdot \mathfrak{G}$ lösbar; denn sonst wäre $B^{p^{l+1}}$ ein Element, das zu $A \cdot \mathfrak{G}$, also nicht zu $\mathfrak{G}'$ gehörte. Die einzigen Untergruppen von $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ sind also die durch die $A_k \cdot \mathfrak{G}$ erzeugten. Das in $(A_k \cdot \mathfrak{G})^a$ enthaltene Element A_k^a hat dieselbe Ordnung wie $(A_k \cdot \mathfrak{G})^a$. Daher ist $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ ein Servanzkomplement in $\mathfrak{H}$.

2. *Ist $\mathfrak{F}$ eine Servanzuntergruppe der Gruppe $\mathfrak{H}$ und wird $\mathfrak{F}$ durch ein Element beherrscht, so ist $\mathfrak{F}$ ein direkter Faktor von $\mathfrak{H}$.*

Beweis. Wird $\mathfrak{F}$ durch das Element A beherrscht, so hat A Primzahlordnung. Behält man die Bezeichnungen des Beweises von 1. bei, so ist $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G} = \mathfrak{E}$. Denn $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{F}$, die A nicht enthält. Ferner ist $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{G} = \mathfrak{H}$. Denn da $\mathfrak{F}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{H}$ ist, kann man die Elemente A_k der Gruppe $\mathfrak{F}$ entnehmen. Jedes Element von $\mathfrak{H}$ ist aber in einer Schar $A_k^a \cdot \mathfrak{G}$ enthalten, also das Produkt von Elementen aus $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$. Folglich ist $\mathfrak{H}$ das direkte Produkt von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$.

Sei jetzt das Einheitselement $\mathfrak{E}$ eine große Untergruppe und $\mathfrak{F}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{H}$. Dann kommen in $\mathfrak{F}$ jedenfalls Elemente von

Primzahlordnung vor. Daher gibt es nach 1. eine Servanzuntergruppe $\mathfrak{F}'$ von $\mathfrak{F}$, und also auch von $\mathfrak{H}$, deren Komplement in $\mathfrak{F}$ durch ein Element beherrscht wird. Nach 2. ist $\mathfrak{H}/\mathfrak{F}'$ der direkte Durchschnitt von $\mathfrak{H}/\mathfrak{F}$ mit einer durch ein Element beherrschten Gruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$. Auf $\mathfrak{F}'$ kann man dieselben Schlüsse anwenden wie auf $\mathfrak{F}$. Setzt man das Verfahren fort, so muß es nach endlich vielen Schritten abbrechen. Man erhält $\mathfrak{H}$ als direkten Durchschnitt von $\mathfrak{F}$ mit Gruppen, die durch ein Element beherrscht werden. Für $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ ergibt sich hieraus der obige Hauptsatz. Der Beweis liefert aber zugleich den Satz:

Ist das Einheitselement der Gruppe $\mathfrak{H}$ eine große Untergruppe der Servanzuntergruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$, so ist $\mathfrak{F}$ ein direkter Faktor von $\mathfrak{H}$[6]).

§ 13.

Will man versuchen, die Ergebnisse des § 2 und § 12 auf allgemeine Gruppen zu übertragen, so hat man zunächst eine Festsetzung darüber zu treffen, welche Gruppen an die Stelle der durch ein Element erzeugten und der durch ein Element beherrschten Gruppen treten sollen. Eine, nicht nur aus dem Einheitselement bestehende, Gruppe soll *vom Range* 1 heißen, wenn jedes Elementenpaar aus ihr in einer durch ein Element erzeugten Gruppe enthalten ist. Die Gruppen vom Range 1 nehme ich als die Verallgemeinerung der in § 2 und § 12 zugrunde gelegten Gruppen.

Eine durch endlich viele Elemente erzeugte Gruppe hat dann und nur dann den Rang 1, wenn sie durch ein einziges Element erzeugt werden kann. Weiter stimmen nach § 11, I. die durch ein Element beherrschten Gruppen mit den primären Gruppen des Ranges 1 überein. Die allgemeinste Gruppe vom Range 1, die ihr Einheitselement als große Untergruppe enthält, kann allerdings nicht durch ein Element beherrscht werden. Sie ist der direkte Durchschnitt endlich vieler solcher Gruppen, die, als primäre Gruppen, zu verschiedenen Primzahlen gehören.

Besitzt eine Gruppe $\mathfrak{G}$ vom Range 1 ein Element der Ordnung 0, so hat jedes ihrer Elemente außer dem Einheitselement $\mathfrak{E}$ diese Ordnung. Daraus folgt, daß eine Gleichung $X^b = A^a$ mit $b \neq 0$ in $\mathfrak{G}$ höchstens eine Wurzel haben kann. Denn der Quotient zweier Wurzeln hat eine andere Ordnung als 0, ist also gleich $\mathfrak{E}$. Daher ist $\mathfrak{G}$ zu einem Modul isomorph. Besitzt $\mathfrak{G}$ kein Element der Ordnung 0, so zerlege man $\mathfrak{G}$ nach § 7 in primäre direkte Faktoren. Wie in § 11 schließt man, daß jeder Faktor zu einer Gruppe $\mathfrak{a}/\mathrm{mod}\ 1$ isomorph ist. Dann ist aber auch $\mathfrak{G}$ zu einer

[6]) Satz 3 und Satz 27 Folgerung 1 der Levischen Schrift behaupten zusammen einen allgemeineren Satz. Doch ist Satz 27 und seine Folgerung 1 in der gegebenen Formulierung nicht richtig. Der Beweis meines Satzes ist nicht erbracht.

solchen Gruppe isomorph. Andererseits ist, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Moduln, $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ stets eine Gruppe vom Range 1. Man kann daher auch definieren:

Eine Gruppe heißt *vom Range* 1, wenn sie mit dem Komplement zu einem Modul $\mathfrak{b}$ in einem Modul $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ isomorph ist.

Es gilt der fundamentale Satz:

Jede Gruppe besitzt eine Servanzuntergruppe vom Range 1.

Beweis. Enthält die Gruppe $\mathfrak{H}$ außer dem Einheitselement $\mathfrak{E}$ nur Elemente der Ordnung 0, so sei A ein solches. Die Lösungen von Gleichungen $X^r = A$ in $\mathfrak{H}$ erzeugen dann eine zu einem Modul isomorphe Servanzuntergruppe von $\mathfrak{H}$. Enthält $\mathfrak{H}$ außer $\mathfrak{E}$ noch weitere Elemente mit von 0 verschiedener Ordnung, so bilden diese eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die Servanzuntergruppe von $\mathfrak{H}$ ist. Nach § 7 stelle man $\mathfrak{G}$ als uneigentliches direktes Produkt von primären Gruppen dar. Sei $\mathfrak{G}_p > \mathfrak{E}$ eine solche. Dann ist $\mathfrak{G}_p$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{G}$. Aus einem Elemente $A_0 \neq \mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}_p$ leite man eine abbrechende oder unendliche Folge von Elementen A_k her, welche den Gleichungen $A_{k+1}^p = A_k$ genügen. Bricht die Folge nicht ab, so ist $\mathrm{grp}(A_0, A_1, A_2, \ldots)$ eine Gruppe vom Range 1, in der jedes Element den Modul aller rationalen Zahlen als Höhe hat, also eine Servanzuntergruppe aller ihrer Obergruppen. Bricht die Folge bei A_l ab, so ist nach § 2, 2. die Gleichung $X^r = A_l$ in $\mathfrak{G}_p$ nur dann lösbar, wenn sie schon in $\mathrm{grp}\, A_l$ eine Lösung hat. Man erhält dann nach § 2, II. und III. eine Servanzuntergruppe des Ranges 1 von $\mathfrak{G}_p$, also auch von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$.

Im allgemeinen ist nicht jedes Element A von $\mathfrak{H}$ in einer Servanzuntergruppe des Ranges 1 enthalten. Man kann nur beweisen, daß A, wie überhaupt jede abzählbare Menge von Elementen A_k aus $\mathfrak{H}$, in einer Servanzuntergruppe von $\mathfrak{H}$ enthalten ist, die aus höchstens abzählbar vielen Elementen besteht. Man wähle nämlich, für jedes Element A aus $\mathrm{grp}(A_1, A_2, \ldots)$, je eine Wurzel jeder in $\mathfrak{H}$ lösbaren Gleichung $X^r = A$ aus, ordne die Wurzeln in eine Folge B_k und behandle die B_k ebenso wie vorher die A_k. Setzt man das Verfahren ins Unendliche fort, so wird die von allen $A_k, B_k, \ldots$ erzeugte Gruppe eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{H}$. — Der Beweis beruht auf der Abzählbarkeit der Menge der ganzen Zahlen. Er läßt sich nicht allein mit Hilfe der in § 1 unter 1. und 2. genannten Eigenschaften der Zahlen führen.

§ 14.

Das endliche Induktionsverfahren, das in § 2 und § 12 angewandt wurde, ist im allgemeinen Falle durch transfinite Induktion zu ersetzen:

Ist $\mathfrak{G}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{H}$, so gibt es eine wohlgeordnete Menge $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ von Servanzuntergruppen von $\mathfrak{H}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *Ist ϱ keine Limeszahl, so ist $\mathfrak{G}_\varrho > \mathfrak{G}_{\varrho-1}$ und $\mathfrak{G}_\varrho/\mathfrak{G}_{\varrho-1}$ vom Range 1.*

2. *Ist ϱ eine Limeszahl, so ist $\mathfrak{G}_\varrho$ die Vereinigungsgruppe der $\mathfrak{G}_{\varrho'}$ mit $\varrho' < \varrho$.*

3. *Die Menge der $\mathfrak{G}_\varrho$ bricht bei einer Ordnungszahl τ, die höchstens zu der Mächtigkeit der Menge der Elemente von $\mathfrak{H}$ gehört, ab, und es ist $\mathfrak{G}_\tau = \mathfrak{H}$.*

Der Beweis ergibt sich ohne Schwierigkeit durch transfinite Induktion aus der Existenz von Servanzuntergruppen des Ranges 1, wenn man noch die folgenden Bemerkungen beachtet:

Zu 1.: Ist $\mathfrak{F}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{H}/\mathfrak{F}$, so ist $\mathfrak{G}$ eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{H}$.

Zu 2.: Ist $\mathfrak{G}_\varrho$ für $\varrho < \sigma$ eine wohlgeordnete Menge mit ϱ wachsender Servanzuntergruppen von $\mathfrak{H}$, so wird die Vereinigungsgruppe aller $\mathfrak{G}_\varrho$ von selbst eine Servanzuntergruppe von $\mathfrak{H}$.

Zu 3.: Die Gruppe $\mathfrak{G}_{\varrho+1}$ enthält mindestens ein nicht zu $\mathfrak{G}_\varrho$ gehöriges Element.

Um gleich eine Anwendung des Satzes zu haben, behandle ich die Aufgabe, zu entscheiden, ob ein System von endlich vielen Gleichungen $\Pi X_\nu^{a_{\mu\nu}} = A_\mu$ in einer Gruppe $\mathfrak{H}$ lösbar ist oder nicht. Man bilde für $\mathfrak{H}$ Gruppen $\mathfrak{G}_\varrho$ mit dem Einheitselement $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{H}$ als $\mathfrak{G}_0$. Es gibt dann eine kleinste Ordnungszahl σ, für welche alle A_μ in $\mathfrak{G}_\sigma$ enthalten sind, und σ ist keine Limeszahl. Soll das Gleichungssystem Lösungen haben, so müssen nach § 9 bereits in $\mathfrak{G}_\sigma$ Lösungen vorhanden sein. Für die Lösbarkeit ist daher notwendig und hinreichend, daß erstens die Gleichungen

$$\Pi X_\nu^{a_{\mu\nu}} = A_\mu \cdot \mathfrak{G}_{\sigma-1}$$

durch Elemente $B_\nu \cdot \mathfrak{G}_{\sigma-1}$ von $\mathfrak{G}_\sigma/\mathfrak{G}_{\sigma-1}$ lösbar sind, und daß dann die Gleichungen

$$\Pi X_\nu^{a_{\mu\nu}} = A_\mu \cdot \Pi B_\nu^{-a_{\mu\nu}}$$

Lösungen besitzen. Auf den rechten Seiten dieser Gleichungen stehen aber Elemente von $\mathfrak{G}_{\sigma-1}$. Wiederholt man das Verfahren, so erhält man nach endlich vielen Schritten die sicher lösbaren Gleichungen $\Pi X_\nu^{a_{\mu\nu}} = \mathfrak{E}$. Man hat also die gestellte Aufgabe auf den Fall reduziert, daß $\mathfrak{H}$ eine Gruppe vom Range 1 ist. Dann liegt aber einfach die zahlentheoretische Aufgabe vor, zu untersuchen, ob ein Kongruenzensystem

$$\Sigma a_{\mu\nu} x_\nu \equiv a_\mu \,(\mathfrak{b})$$

in einem Modul $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ Lösungen besitzt.

Man müßte jetzt, um eine Zerlegung von $\mathfrak{H}$ in direkte Faktoren vom Range 1 zu erzielen, noch aus jedem Element von $\mathfrak{G}_{\varrho+1}/\mathfrak{G}_\varrho$ ein einziges Element von $\mathfrak{H}$ so auswählen, daß diese Elemente eine Gruppe bilden. Dem stellt sich eine unüberwindliche Schwierigkeit entgegen. Diese hat ihren Grund nicht etwa in der mengentheoretischen Allgemeinheit, in der die Aufgabe hier behandelt wird; sie tritt bereits in dem einfachsten Falle auf, daß es nämlich eine Servanzuntergruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$ gibt, für welche sowohl $\mathfrak{G}$ als auch $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ vom Range 1 ist. Ich erläutere die Schwierigkeit an diesem Falle:

Sei $G_0 \neq \mathfrak{G}$ eine Nebenschar von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$. Besteht für ein Element G von $\mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ eine Gleichung $G^r = G_0$, so muß das aus G_0 ausgewählte Element E_0 von $\mathfrak{H}$ die r-te Potenz eines Elementes aus G sein. Die Elemente E_0, die dieser Bedingung genügen, bilden eine Schar $F \leqq G_0$. Die Wahl von E_0 ist also nur dann möglich, wenn, bei Durchlaufung aller Scharen G, ΔF existiert. Dieser Durchschnitt ist nun zwar für jede endliche Teilmenge der F stets vorhanden. Daraus folgt aber nicht, daß alle F einen Durchschnitt besitzen.

In der Tat lassen sich Beispiele von Gruppen der betrachteten einfachen Art konstruieren, bei denen dieser Durchschnitt nicht vorhanden ist und die auch nicht direkte Produkte von Gruppen des Ranges 1 sind.

(Eingegangen am 27. Februar 1923.)

Zur Tensoralgebra.

Von

E. Waelsch in Brünn.

1. Die vektorische Basis, d. h. das vollständige System der ganzen rationalen Drehstreckungsinvarianten, eines Tensors zweiter Stufe T_2, bestehend aus 7 Invarianten, hat R. Weitzenböck 1921 (Math. Zeitschrift **10**, S. 80) bestimmt, Rabinowitsch 1913 (Palermo Rend. **36**, S. 99), und ich habe sie 1904 (Wien. Ber. **113**, S. 1081) vom Standpunkt der Binäranalyse aus gefunden. Die Invarianten zweier dieser so erhaltenen Basen sind nicht identisch, aber durch einander ausdrückbar.

Dem Tensor T_2 wies ich a. a. O. eine binäre doppeltquadratische Form $a_x^2 b_y^2$ zu, deren Elementarkomitanten sind: $\varphi = a_x^2 b_x^2$, $f = (ab) a_x b_x$, $3\sigma = (ab)^2$. Die Binärbasis von $a_x^2 b_x^2$ besteht dann außer aus σ aus der Binärbasis von f und φ, die 18 Komitanten enthält (Clebsch, Binäre Formen, S. 212), nämlich: 6 Invarianten, mit σ die obigen 7, dann noch 6 quadratische, 5 biquadratische Formen und eine Form 6. Ordnung.

2. Den Tensoren höherer Stufe ordnete ich dann 1904 (Wien. Ber. a. a. O. S. 1108) mehrfachquadratische Formen zu, bestimmte sie durch Formen gerader Ordnung entsprechende *Vielbeine* (damals noch „mehrfache Vektoren" genannt) und führte auch die „Produkte" von 2 Vielbeinen ein, die den Überschiebungen ihrer beiden Formen zugehören. Die Binärbasis der Formen dieser Vielbeine gab die vektorische Basis des Tensors[1]).

[1]) Siehe C. R. 1906 und Wien. Monatshefte **17**, S. 241. Dort wurde das $\varkappa$-te Produkt des α-beins $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$ und des β-beins $\mathfrak{b}^{(\beta)}$ bezeichnet mit $\mathfrak{a}^{(\alpha)} \overset{\varkappa}{\cdot} \mathfrak{b}^{(\beta)}$; es ist insbesondere $\mathfrak{a}^{(\alpha)}_0 \mathfrak{b}^{(\beta)} = \mathfrak{a}^{(\alpha)} \mathfrak{b}^{(\beta)}$. Im folgenden wird statt der Produkte $\mathfrak{a}^{(\alpha)}_{\varkappa} \mathfrak{b}^{(\beta)}$ und $\mathfrak{a}^{(\alpha)}_{\varkappa} \mathfrak{b}^{(\beta)}$, also auch des Skalars $\mathfrak{a}^{(\alpha)}_{\varkappa} \mathfrak{b}^{(\alpha)}$, auch $\mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{b}^{(\beta)}$ beziehungsweise $\mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{b}^{(\alpha)}$ und weiter auch $\mathfrak{a}^{(\alpha)}_{\mathfrak{b}^{(\beta)}} = \mathfrak{b}^{(\beta)}_{\mathfrak{a}^{(\alpha)}}$ gesetzt, z. B. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}$. Das durch Produktbildungen bei „primärer" Assoziation aus den Vielbeinen $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$, $\mathfrak{b}^{(\beta)}$, $\mathfrak{c}^{(\gamma)}$, ... entstehende Vielbein: $(\ldots ((\mathfrak{a}^{(\alpha)}_{\varkappa} \mathfrak{b}^{(\beta)}_{\lambda}) \mathfrak{c}^{(\gamma)}_{\mu} \ldots) \overset{\omega}{\cdot} \mathfrak{d}^{(\zeta)}$ wird bei Weglassung der Klammern mit $\mathfrak{a}^{(\alpha)}_{\varkappa} \mathfrak{b}^{(\beta)}_{\lambda} \mathfrak{c}^{(\gamma)}_{\mu} \ldots \overset{\omega}{\cdot} \mathfrak{d}^{(\zeta)}$ bezeichnet. Z. B. das Produkt der Vektoren: $(((\mathfrak{a}_0 \mathfrak{a})_0 \mathfrak{b})_2 \mathfrak{c})_1 \mathfrak{d}$ mit: $\mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_1 \mathfrak{d}$.

Für T_3 sind diese Vielbeine der obige Skalar σ (0-bein), der Vektor $\mathfrak{a}$·(1-bein) und das 2-bein $\mathfrak{z}$, welche den obigen Formen f bzw. φ zugehören. Die vektorische Basis von T_2 besteht dann nach obigem außer σ aus den 18 vektorischen Komitanten von $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{a}$, das sind:

6 Skalare: $\mathfrak{a}_\mathfrak{a} = 2A$, $\mathfrak{z}_\mathfrak{z} = 2g_2$, $\mathfrak{h}_\mathfrak{z} = 6g_3$, $\mathfrak{p}_\mathfrak{a} = J_3$, $\mathfrak{q}_\mathfrak{a} = J_4$, $\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{a} = 2J$;
6 Vektoren: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{z}_{\dot 2}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{h}_{\dot 2}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{p}_i\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{q}_i\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_i\mathfrak{q}$;
5 2-beine: $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{h} = \frac{1}{2}\mathfrak{z}_{\dot 2}\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}_i\mathfrak{a}$, $\mathfrak{h}_i\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_i\mathfrak{h}$; 1 3-bein: $\mathfrak{t} = \mathfrak{z}_i\mathfrak{h}$.

Zwischen den 6 Skalaren besteht eine Relation (welche bei Weitzenböck, § 3, erwähnt wird), die J^2 durch die 5 ersten ausdrückt (Clebsch, S. 215 (6)).

Diese Basis kann aufgefaßt werden als simultan zu dem Vektor $\mathfrak{a}$ und dem zu T_2 gehörigen symmetrischen Tensor T_2^s, der allein durch $\mathfrak{z}$ und σ bestimmt ist. Hierbei ist aber zu bemerken: Sind die Formen a_x^2, b_x^2 in φ solche von polaren Vektoren, so ist $f = (ab)\,a_x\,b_x$ die Form eines axialen Vektors.

3. Die vektorische Basis von T_2 und mehreren polaren und axialen Vektoren $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ ist Basis von T_2^s und den Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$, also von $\mathfrak{z}$, σ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$. Letztere besteht aus σ und der Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{z}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$, die zunächst die Basis $\mathfrak{z}, \mathfrak{h}, \mathfrak{t}, g_2, g_3$ von $\mathfrak{z}$ und ferner die Basis $\mathfrak{B}'$ der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ enthält, der die Vektoren und Skalare vom Typus:

(I) $$\mathfrak{a},\quad \mathfrak{a}_i\mathfrak{b},\quad \mathfrak{a}_\mathfrak{a},\quad \mathfrak{a}_\mathfrak{b},\quad \mathfrak{a}_i\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}$$

angehören, mit Relationen der Typen:

(1) $$\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} + \mathfrak{b}_i\mathfrak{c}\,\mathfrak{a} + \mathfrak{c}_i\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = 0,$$

(2) $$2(\mathfrak{a}_i\mathfrak{b})(\mathfrak{c}_i\mathfrak{d}) = \mathfrak{b}_\mathfrak{c}\mathfrak{a}\,\mathfrak{d} + \mathfrak{a}_\mathfrak{b}\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} - \mathfrak{a}_\mathfrak{c}\mathfrak{b}\,\mathfrak{d} - \mathfrak{b}_\mathfrak{b}\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}.$$

Ferner enthält $\mathfrak{B}$ die Basis $\mathfrak{B}''$ von $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, und diese umfaßt, wenn $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$ die Vielbeine der Basis von $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{x}$ sind (wie nach Clebsch, S. 194 gesagt werden kann) die Vielbeine $\mathfrak{a}^{(\alpha)}_{2\varepsilon}\mathfrak{y}^\varepsilon$ und $\mathfrak{a}^{(\alpha)}_{2\varepsilon-1}\mathfrak{y}^\varepsilon$ mit $0 \leqq \varepsilon \leqq \alpha$. Nun ergibt Rekursion diese Vielbeine darstellbar als $\mathfrak{Z}_\varkappa\mathfrak{a}_\lambda^\alpha\mathfrak{b}_\mu^\beta \ldots \mathfrak{x}_\omega^\xi\mathfrak{y}^\eta$, wo $\mathfrak{Z} = \mathfrak{z}, \mathfrak{h}, \mathfrak{t}$.

Da aber ferner[2]) solch ein mehrfaches Produkt linear ausdrückbar ist durch Produkte: $\mathfrak{P} = \mathfrak{a}_\varphi^{\alpha'}\mathfrak{b}_\psi^{\beta'} \ldots \mathfrak{y}_\varrho^{\eta'}\mathfrak{Z}$, fallen die Vielbeine von $\mathfrak{B}''$ unter die $\mathfrak{P}$.

Endlich kann das Vielbein $\mathfrak{a}_\varphi^{\alpha'}\mathfrak{b}_\psi^{\beta'} \ldots \mathfrak{y}^{\eta'}$ in $\mathfrak{P}$ nach (I) ersetzt werden durch ein Produkt von Vektoren vom Typus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}$, worauf dann $\mathfrak{P}$ vermöge der Relationen (2) reduzibel wird.

---

[2]) Nach P. Gordan und E. Stroh, s. bei letzterem 1889, Math. Annalen **33**.

Handelt es sich nur um die *Invarianten* von $\mathfrak{B}''$, so ist $\varrho = 4, 6$, wenn $\mathfrak{Z} = \mathfrak{z}, \mathfrak{h}$ bzw. $= \mathfrak{t}$. Daher ergeben sich hier bloß die folgenden Invariantentypen:

(II) $\mathfrak{z}_{a^2}$, $\mathfrak{z}_{ab}$, $\mathfrak{z}_{a^2 i b}$, $\mathfrak{z}_{a i bc}$; $\mathfrak{h}_{a^2}$, $\mathfrak{h}_{ab}$, $\mathfrak{h}_{a^2 i b}$, $\mathfrak{h}_{a i bc}$, $\mathfrak{t}_{a^3}$, $\mathfrak{t}_{a^2 b}$, $\mathfrak{t}_{abc}$.

Denn die zu erwartende Invariante $\mathfrak{z}_{(a i b)(c i b)}$ tritt nicht auf, da sie nach (2) auf Invarianten vom Typus $\mathfrak{z}_{ab}$ reduzibel ist. Analoges für $\mathfrak{h}$ statt $\mathfrak{z}$. Ferner sind Invarianten vom Typus $\mathfrak{t}_{abc}$, wo etwa $\mathfrak{c}$ den Typus $\mathfrak{b} i \mathfrak{e}$ hat, reduzibel[3]).

4. Hiernach ergeben sich für T_2 die Invarianten:

$$(a):\ \sigma,\ g_2,\ g_3; \qquad (b):\ \mathfrak{a}_a,\ \mathfrak{z}_{a^3} = J_3,\ \mathfrak{h}_{a^3} = J_4,\ \mathfrak{t}_{a^3},$$

zusammen die obigen 7, wobei $\mathfrak{t}_{a^3}$ die J von Art. 2 ersetzt (vgl. Clebsch, S. 213).

Für die Basis von T_2 und einem weiteren Vektor $\mathfrak{b}$, von T_2 und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und T_2 und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ergeben sich bzw. 20, 48, 97 Invarianten gegenüber den 21, 57, 125 Weitzenböcks[4]).

Es folgen nämlich für T_2 und $\mathfrak{b}$ die obigen 7 von T_2, und aus (b) 4 weitere Invarianten durch Vertauschung von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$ als: $\mathfrak{b}_b = 2B$, $\mathfrak{z}_{b^3} = J_3'$, $\mathfrak{h}_{b^3} = J_4'$, $\mathfrak{t}_{b^3}$ und ferner 9 aus (I, II) als $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ als:

$$(c)\quad \mathfrak{a}_b = 2C;\ \mathfrak{z}_{ab},\ \mathfrak{z}_{a^2 i b},\ \mathfrak{z}_{a i b^2} = J_4'';\ \mathfrak{h}_{ab},\ \mathfrak{h}_{a^2 i b},\ \mathfrak{h}_{a i b^2},\ \mathfrak{t}_{a^2 b},\ \mathfrak{t}_{a b^2},$$

das sind 20 Invarianten[5]).

Die Basis von T_2 und $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ besteht aus den 20 Invarianten von T_2 und $\mathfrak{b}$ und den folgenden: 4, die sich ergeben durch Vertauschung von $\mathfrak{a}$

---

[3]) Nach Clebsch, S. 188, da die entsprechende binäre Form das Glied gibt:

$$(\mathfrak{b} i \mathfrak{e}) \cdot ([\mathfrak{p} = \mathfrak{z}_a]_i [\mathfrak{q} = \mathfrak{z}_b]) = \mathfrak{p}_b \mathfrak{q}_e - \mathfrak{q}_b \mathfrak{p}_e = \mathfrak{z}_{ab} \mathfrak{h}_{ae} - \mathfrak{h}_{ab} \mathfrak{z}_{ae}.$$

[4]) Wie mir Herr Weitzenböck mitteilt, hat ihn schon E. Study darauf aufmerksam gemacht, daß im ersten Falle nur 20 Invarianten auftreten.

[5]) In der Tat lassen sich die ersten 5 Invarianten Weitzenböcks vom Typus 5b) für $x = y = b$ durch die obigen Invarianten σ, J_2 und $C = \frac{1}{2}\mathfrak{a}_b$, welches seine Invariante T_1 ist, und durch B, J_3', J_4' J ausdrücken, so daß die letzten 4 statt seiner 5 auftreten. Denn ist L die durch T_2 oder Weitzenböcks $P_1(x, y)$ gegebene lineare Transformation, und L_c ihre konjugierte, so hat L_c die Vielbeine $\mathfrak{z}$, $-\mathfrak{a}, \sigma$. Die durch die $Q_{1,2,3}(x, y)$ Ws. gegebenen Transformationen sind die folgenden: L^2, $L L_c$, $L_c L$, und es ergibt sich vermöge der Bestimmung der Vielbeine dieser Transformationen (nach Art. 7, 1904, S. 1095) für die $P_{0,1}(b, b)$, $Q_{1,2,3}(b, b)$ Ws. unter Verwendung von: $\frac{1}{4}\mathfrak{a}^2 \cdot \mathfrak{b}^2 = C^2 - \frac{1}{3}AB$, $\mathfrak{z} i \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^2 = J_4''$ der Reihe nach:

$$B,\ \frac{1}{2}J_3' + \sigma B,\ J_4' + \sigma J_3' + C^2 + \left(\frac{2}{3}g_2 + \sigma^2 - A\right)B,\ Q_1(b, b) + 2(AB - C^2) \pm J_4''.$$

[6]) Wien. Monatsh. **20** (1909), S. 289, wo die Kugelfunktion α-ter Ordnung als $\mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{x}^\alpha$ durch das Vielbein $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$ bestimmt erscheint.

mit $\mathfrak{c}$ in (b); $9+9$ aus (c) durch Vertauschung von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$; 1 aus (I), nämlich $\mathfrak{a}_i \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$; 5 aus (II), nämlich: $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}\mathfrak{c}}$, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}_i \mathfrak{c}\mathfrak{b}}$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}\mathfrak{c}}$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_i \mathfrak{c}\mathfrak{b}}$, $\mathfrak{t}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$. Zusammen die obigen 48 Invarianten.

Die Basis von T_2 und $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ besteht aus diesen 48 und den folgenden: 4 aus (b) durch Vertauschung von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{d}$; 27 aus (c) durch Vertauschung von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{d}$, mit $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}$ und mit $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$; 3 aus (I) nämlich: $\mathfrak{a}_i \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}_i \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}_i \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{d}$, und 15 aus (II), nämlich aus den obigen $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ bis $\mathfrak{t}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ durch Vertauschung von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$; $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{a}$; $\mathfrak{d}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$; das sind zusammen die angeführten 97 Invarianten.

5. Jeder der Typen Weitzenböcks, der höheren Grades etwa in dem Vektor $\mathfrak{x}$ ist, läßt sich nach Potenzen von $\frac{1}{2}\mathfrak{x}_\mathfrak{x} = x^2 + y^2 + z^2$ entwickeln, wobei die Entwicklungskoeffizienten Invarianten sind, und *Kugelfunktionen*[6]) der Koordinaten x, y, z, oder, wie gesagt werden kann, des Vektors $\mathfrak{x}$. Wie denn alle hier auftretenden Invarianten Kugelfunktionen der Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \ldots$ sind oder Polaren solcher für diese Vektoren und ihre vektorischen Produkte. Z. B. sind $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}^2}$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}^2}$, $\mathfrak{t}_{\mathfrak{a}^3}$ Kugelfunktionen 2. bzw. 3. Ordnung des Vektors $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}^2 i \mathfrak{b}} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}\mathfrak{a}}$ ist eine Polare der Kugelfunktion $\mathfrak{z}_{\mathfrak{x}^2}$, nämlich $\mathfrak{z}_{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}$ für $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_i \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{a}$.

In der vektorischen Basis von T_2 (Art. 2) treten dann auch die Gradienten der Kugelfunktionen $\mathfrak{z}_{\mathfrak{a}^2}$, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}^2}$, $\mathfrak{t}_{\mathfrak{a}^3}$ auf: denn es ist ([6]) S. 310): $\operatorname{grad} \mathfrak{a}_\mathfrak{x}^{(\alpha)} = 2\alpha \mathfrak{a}_\mathfrak{x}^{(\alpha)}{}_{-1}$, also für $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$:

$$\tfrac{1}{4} \operatorname{grad} \mathfrak{z}_{\mathfrak{a}^2} = \mathfrak{p}, \quad \tfrac{1}{4} \operatorname{grad} \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}^2} = \mathfrak{q}, \quad \tfrac{1}{6} \operatorname{grad} \mathfrak{t}_{\mathfrak{a}^3} = \mathfrak{t}_{\mathfrak{a}^2}.$$

6. Die *Bedingungen für* T_2, eine *Drehstreckung* D zu liefern, habe ich ebenfalls 1904 (Wien. Ber. a. a. O. S. 1084) abgeleitet. Dort ist D gegeben durch eine bilineare Form $r_x s_y$, deren Elementarkomitante $r_x s_x$ einem Vektor $\mathfrak{r} = \pm \sqrt{G} \sin \varphi/2 \, \mathfrak{e}$ ($\mathfrak{e}$ = Einheitsvektor) zugehört, der auf der Drehachse liegt, und deren Elementarinvariante $\varkappa = (rs) = \pm \sqrt{G} \cos \varphi/2$ ist. Hierbei ist φ der Drehwinkel, und $G = r^2 + \varkappa^2$ das Streckungsverhältnis, mit $r^2 = |\mathfrak{r}|^2$ (siehe Wien. Ber. 1903, S. 661).

Der Tensor T_2 liefert D dann, wenn seine doppeltquadratische Form $a_x^2 b_y^2$ (Art. 1) das Quadrat einer Bilinearform $r_x s_y$ ist[7]). Die Gleichung der Affinität, die in diesem Fall zu T_2 gehört, wird zu (s. Wien. Ber. 1903, S. 659):

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{r}_2^2 \mathfrak{x} + 2\varkappa \mathfrak{r}_i \mathfrak{x} + (\varkappa^2 - \tfrac{1}{3} r^2) \mathfrak{x},$$

womit eine Parameterdarstellung der Drehstreckung gegeben ist, bei welcher der Vektor $\mathfrak{r}$ der Drehachse, und der Drehwinkel φ in Evidenz treten[8]).

[7]) Die hierher gehörige Aufgabe der binären Invariantentheorie hatte schon Giordano 1899, Giorn. di mat. **37**, behandelt.

[8]) Vgl. die Parameterdarstellungen von Euler und Cayley und die Darstellung bei Gibbs-Wilson, Vektoranalysis, 2. Aufl., S. 338.

Dieser Tensor hat demnach das „spezielle“ 2-bein $\mathfrak{z} = \mathfrak{r}^2$, dessen beide Teilvektoren mit $\mathfrak{r}$ zusammenfallen. Ferner ist sein Vektor $\mathfrak{a} = 2\varkappa\mathfrak{r}$ und sein Skalar $\sigma = \varkappa^2 - \frac{1}{3}r^2$.

Die beiden ersten Gleichungen geben: Die Form φ von $\mathfrak{z}$ ist von dem Quadrat der Form f von $\mathfrak{a}$ nur um einen konstanten Faktor verschieden, wozu die erste Überschiebung beider Formen verschwinden muß. Daher folgt die erste der fraglichen Bedingungen als: $\mathfrak{z}_1 \mathfrak{a} = 0$.

Ferner ist $\mathfrak{z}_3 = 2g_2 = \frac{8}{3}r^4$, $\mathfrak{a}_4 = 2A = 8\varkappa^2 r^2$, und nach der dritten Gleichung: $\sigma^2 = (\varkappa^2 - \frac{1}{3}r^2)^2$. Daher folgt durch Elimination der Größen auf den rechten Seiten der letzten Gleichungen, die zweite der fraglichen Bedingungen als: $12\,\sigma^2 g_2^2 = (A - g_2)^2$.

7. Auch die Frage von Rabinowitsch nach der Äquivalenz zweier Tensoren T_2 und T_2' bei Drehungen ist durch die Binäranalyse erledigt durch die Äquivalenz doppeltquadratischer Formen bei kogredienten linearen Transformationen, oder der Äquivalenz von Systemen je einer biquadratischen und quadratischen Form (s. Clebsch, a. a. O. S. 431ff.).

Es ergibt sich hiernach: Aus der Gleichheit der 5 absoluten Invarianten zweier reellen Tensoren T_2 und T_2' folgt die Äquivalenz von T_2 und T_2' noch nicht, wenn 1) $\mathfrak{a}$ in einer Symmetrieachse von $\mathfrak{z}$ liegt; 2) $\mathfrak{z}$ ein spezielles 2-bein $= \mathfrak{v}^2$ ist, und $\mathfrak{a}$ senkrecht $\mathfrak{v}$; 3)[9] $\mathfrak{z} = \mathfrak{v}^2$, $\mathfrak{a} = c\mathfrak{v}$. Die Äquivalenz folgt in den anderen Fällen. Hier ergeben sich, wenn $J \neq 0$, typische Darstellungen, d. h. durch kovariante Vektoren mit invarianten Koeffizienten; und zwar durch die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$, wenn noch: $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}/J$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}/J$, $\mathfrak{q} = -\mathfrak{l}/J$ die zu ihnen reziproken Vektoren sind, für $\mathfrak{z}$ (vgl. Clebsch, S. 453 (8)) die Darstellung:

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{2}\mathfrak{p}\mathfrak{a} + \left(\frac{1}{2}\mathfrak{q} + \frac{1}{3}g_2\mathfrak{a}\right)\mathfrak{p} + \left(\frac{1}{6}g_2\mathfrak{p} + g_3\mathfrak{a}\right)\mathfrak{q},$$

wenn aber $J = 0$ (vgl. Clebsch, S. 437 (16)):

$$|\mathfrak{a}_1\mathfrak{p}|^2\mathfrak{z} = A_0\mathfrak{a}^2 + A_1\mathfrak{a}\mathfrak{p} + A_2\mathfrak{p}^2,$$

wo $A_\varkappa$ Invarianten sind.

Gesondert sind noch die Fälle zu betrachten, wo eines oder zwei der $\mathfrak{z}, \mathfrak{a}, \sigma$ verschwinden.

[9]) Fall 1) umfaßt auch 2), 3), da ein zu $\mathfrak{v}$ senkrechter Vektor bzw. $\mathfrak{v}$ selbst auf einer Symmetrieachse von $\mathfrak{z} = \mathfrak{v}^2$ liegt.

(Eingegangen am 19. Mai 1923.)

Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit des Herrn Waelsch.

Von

Roland Weitzenböck in Blaricum.

Es ist mir seinerzeit entgangen, daß die in meiner Arbeit „Zur Tensoralgebra“ (Math. Zeitschrift **10** (1921), S. 80—87) aufgestellten orthogonalen Invarianten eines kovarianten Tensors $\Sigma a_{ik} x_i y_k$ und einer Reihe von Vektoren bereits 1904 und 1906 von Herrn Waelsch vom Standpunkt der Binäranalyse aus vollständig bestimmt wurden, d. h. als simultane Invarianten von binären Formen, welche dem Tensor und den Vektoren zugeordnet werden. Die fraglichen Invarianten erscheinen hierbei ausgedrückt durch die Koeffizienten dieser binären Formen und nicht durch die ursprünglich gegebenen Größen $a_{ik}, x_i, y_i, \ldots$, wie dies bei mir der Fall ist, wenn auch der Zusammenhang zwischen diesen Bestimmungszahlen und jenen Koeffizienten ein sehr einfacher ist.

Analoges gilt, wenn man den Tensor a_{ik} in einen symmetrischen C_{ik} und einen alternierenden Tensor Q_{ik} zerlegt:

$$a_{ik} = C_{ik} + Q_{ik} = \frac{1}{2}(a_{ik} + a_{ki}) + \frac{1}{2}(a_{ik} - a_{ki}).$$

Das fragliche Invariantensystem wird dann zurückgeführt auf die orthogonalen Invarianten einer ternären quadratischen Form $(CX)^2$ und einer Reihe von Linearformen, von denen eine durch Q_{ik} gegeben ist; dieses Problem wurde von E. Study, Leipz. Ber. **49** (1897), S. 442—461 gelöst.

Herrn Study verdanke ich ferner die Bemerkung, daß bei den von mir auf S. 82 angeführten Typen eine überzählige Komitante vorkommt, so daß das auf S. 83 genannte volle System kein kleinstes ist. Tatsächlich wird die S. 82 bei (5b) genannte Komitante $Q_3(x, y) = (x\alpha)(ab)(\beta y)$ reduzibel:

$$Q_3(x, y) = (xy)[J_2' - J_2] + Q_1(x, y) + Q_1(y, x) - Q_2(x, y) - T_1(x) T_1(y).$$

Hiernach sind auf S. 83 in (8) nur sechs Invarianten (5b) aufzuzählen.

Bei dieser Gelegenheit korrigiere ich noch die folgenden Druckfehler: S. 82 bei (4) muß rechts x_i' statt x_i stehen; S. 86 in (19) muß bei Δ'' rechts $J_2' - J_2$ statt $J_2 - J_2'$ gelesen werden.

(Eingegangen am 15. November 1923.)

Neue Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

Die folgenden Seiten sind durch einen Encyklopädieartikel über elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung, der jetzt abgeschlossen ist und demnächst veröffentlicht werden soll, veranlaßt. Bei der Abfassung des Referates hat sich für einige Sätze eine verschärfte Fassung, für andere eine vereinfachte Beweisführung ergeben. Auch liegen verschiedene, so weit ich sehe, neue Resultate vor. Die neuen Ergebnisse sollen in diesem Aufsatz in einem losen Zusammenhang wiedergegeben werden.

I. Randwertaufgaben.

1. Es sei T ein beschränktes Gebiet in der Ebene der Veränderlichen x und y, dessen Begrenzung aus einer endlichen Anzahl geschlossener, doppeltpunktfreier, stetig gekrümmter Kurven besteht, die einander weder schneiden noch berühren[1]).

Ist $x = x(s)$, $y = y(s)$ die Gleichung irgendeiner der Begrenzungskurven (s = Bogenlänge), so wird darüber hinaus vorausgesetzt, daß

$$(1)\qquad \left|\frac{d^2}{ds^2}x(s+h)-\frac{d^2}{ds^2}x(s)\right|,\quad \left|\frac{d^2}{ds^2}y(s+h)-\frac{d^2}{ds^2}y(s)\right| < c_1|h|^{\lambda_1},$$

$$(c_1 \text{ konstant},\ 0<\lambda_1<1)$$

gilt. Die Gesamtheit der Randkurven heiße S. Es seien a, b, c und f Funktionen, die im Innern und auf dem Rande von T („in $T+S$“) stetig sind und im Innern von T („in T“) Ungleichheiten von der Form

$$(2)\qquad |a(x+h, y+k)-a(x,y)| < c_2(|h|+|k|)^{\lambda_2},\qquad \begin{pmatrix} c_2 \text{ konstant},\\ 0<\lambda_2<1\end{pmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

[1]) Das „Gebiet“ ist für uns das, was gelegentlich „offenes Gebiet“ genannt wird. Es besteht also nur aus inneren Punkten. Gebiet nebst Rand heißt „Bereich“.

genügen. Es möge schließlich $g(s)$ eine auf S erklärte abteilungsweise stetige Funktion bezeichnen.

Ein Verfahren, das die Auflösung der *zweiten* Randwertaufgabe der Differentialgleichung

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f \tag{3}$$

auf die Auflösung einer linearen Integralgleichung zurückzuführen gestattet, ist von Herrn Picard skizziert worden[2]). Eine ins einzelne ausgearbeitete, anders geartete Methode ist von mir später angegeben worden[3]). Eine weitere Auflösungsmöglichkeit, die sich durch besondere Einfachheit auszeichnet, bietet die folgende Überlegung.

Es möge $q(x, y)$ irgendeine in T und auf S stetige, in T einer zu (2) analogen Bedingung genügende wesentlich negative Funktion bezeichnen, $q < 0$. Wie sich leicht zeigen läßt, ist das zweite Randwertproblem in der Theorie der Gleichung $\Delta u + qu = 0$ stets und zwar in einer einzigen Art und Weise lösbar[4]). Also existiert die zu dem zweiten Randwert-

---

[2]) Vgl. É. Picard, Annales de l'École Normale **14** (1907), S. 335—340.

[3]) L. Lichtenstein, Journ. f. Math. **143** (1913), S. 51—105, insb. S. 81—93.

[4]) Es genügt für den Augenblick anzunehmen, daß die Normalableitung, als Funktion der Bogenlänge aufgefaßt, sich stetig verhält. Das zuletzt genannte Problem kann leicht auf die folgende Form gebracht werden: Es ist diejenige in $T+S$ stetige Funktion $v(x, y)$ zu bestimmen, die in T stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat und daselbst einer Differentialgleichung von der Form $\Delta v + qv = q_*$ (q_* in $T+S$ stetig) genügt, wenn darüber hinaus bekannt ist, daß v auf S eine stetige Normalableitung hat, und $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ gilt.

Ist $S(xy; \xi\eta)$ die „Greensche Funktion zweiter Art“:

$$\Delta S = \frac{2\pi}{\mathsf{T}}\ (\mathsf{T} = \text{Flächeninhalt von } T), \qquad \frac{\partial S}{\partial n} = 0; \qquad \int_T S(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0, \tag{4}$$

so führt die „Greensche Formel“ in bekannter Weise auf die Integralgleichung zur Bestimmung von $v(x, y)$:

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_T \left[S(x, y; \xi, \eta)\, q(\xi, \eta) + \frac{1}{\mathsf{T}}\right] v(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - \frac{1}{2\pi}\int_T S(x, y; \xi, \eta)\, q_*(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{5}$$

Daß das homogene Randwertproblem in der Theorie der Gleichung $\Delta u + qu = 0$ keine Lösung hat, ergibt sich aus den Beziehungen

$$\int_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy + \int_T u\, \Delta u\, dx\, dy = -\int_S u\frac{\partial u}{\partial n}\, ds, \tag{6}$$

mithin

$$\int_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy - \int_T qu^2\, dx\, dy = 0, \tag{7}$$

somit $u = 0$.

problem gehörige Greensche Funktion dieser Gleichung, $\Gamma^{II}(x, y; \xi, \eta)$. Handelt es sich jetzt um die Gleichung (3) und soll auf S überdies $\frac{\partial u}{\partial n} = g(s)$ sein $\left(\frac{\partial}{\partial n} = \text{Ableitung in der Richtung der Innennormale}\right)$, so setze man vor allem

$$u = U + w, \quad \Delta w + qw = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = g(s). \tag{8}$$ [5])

Man findet so

$$\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + cU = f + qw - a\frac{\partial w}{\partial x} - b\frac{\partial w}{\partial y} - cw = f_1. \tag{10}$$

Hier wird f_1, auch wenn $g(s)$ schlechthin stetig ist, bei der Annäherung an S im allgemeinen logarithmisch unendlich,

$$|f_1| < \alpha_3 |\log \mathfrak{r}| \qquad (\alpha_3 \text{ konstant}). \tag{11}$$

Setzt man jetzt

$$\Delta U + qU = V, \tag{12}$$

und nimmt man an, daß auch V einer Ungleichheit von der Form

$$|V| < \alpha_4 |\log \mathfrak{r}| \qquad (\alpha_4 \text{ konstant}) \tag{13}$$

genügt, so findet man unmittelbar

$$U(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_T \Gamma^{II}(x, y; \xi, \eta) V(\xi, \eta) d\xi d\eta, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{\partial}{\partial x}\Gamma^{II}(x, y; \xi, \eta) V(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{\partial}{\partial y}\Gamma^{II}(x, y; \xi, \eta) V(\xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \tag{15}$$

mithin

$$V(x, y) - \frac{1}{2\pi}\int_T \left\{a(x, y)\frac{\partial \Gamma^{II}}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial \Gamma^{II}}{\partial y} + (c(x, y) - q(x, y))\Gamma^{II}\right\} V(\xi, \eta) = f_1(x, y). \tag{16}$$

[5]) Nach Voraussetzung ist $g(s)$ *abteilungsweise stetig.* Um das Problem der Ermittelung von w zu einem völlig bestimmten zu machen, empfiehlt es sich zu fordern, daß eine Ungleichheit von der Form

$$\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial w}{\partial y}\right| < \alpha_1 |\log \mathfrak{r}| + \alpha_2 \tag{9}$$

(α_1, α_2 konstant, $\mathfrak{r}$ der Abstand des Punktes (x, y) von S) besteht.

Das Problem ist auf die Auflösung einer linearen Integralgleichung zurückgeführt. Die weitere Behandlung der Aufgabe ist naheliegend[6])[7]).

In einer ganz ähnlichen Weise läßt sich das dritte Randwertproblem erledigen. Hier handelt es sich um die Bestimmung etwaiger beschränkter, in T nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetiger („regulärer") Lösungen der Differentialgleichung (3), die auf S der Beziehung

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = g. \tag{17}$$

genügen[8]). Ist etwa $h \leqq 0$, $\int_S h\,ds \neq 0$, so existiert gewiß die zu der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0$ gehörige Greensche Funktion $\Gamma^*(x, y; \xi, \eta)$ der Gleichung $\Delta u = 0$. Man wird dann setzen

$$u = U + w, \quad \Delta w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} + hw = g, \tag{18}$$

$$U(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_T \Gamma^*(x, y; \xi, \eta)\, V(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{19}$$

Ist die Greensche Funktion $\Gamma^*(x, y; \xi, \eta)$ nicht vorhanden, was bei beliebigem h vorkommen könnte, so müßte man sich nach einer geeigneten Greenschen Funktion „im weiteren Sinne" umsehen.

Es mögen jetzt die Randkurven S sämtlich analytisch und regulär sein. In der Theorie der Gezeiten stellt sich die Aufgabe ein, etwaige in T und auf S stetige, in T reguläre Lösungen der Differentialgleichung (3) zu bestimmen, die auf S der Bedingung

---

[6]) Der Kern der Integralgleichung (16) wird für $\xi = x, \eta = y$ wie $[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^{-\frac{1}{2}}$ unendlich. Der zweite iterierte Kern ist in $T + S$ stetig. Der Umstand, daß $f_1(x, y)$ am Rande logarithmisch unendlich werden kann, macht keinerlei Schwierigkeiten, denn die Funktion, die man erhält, wenn man unter dem Integralzeichen V durch f_1 ersetzt, ist in $T + S$ stetig. Der Beweis ließe sich ohne Mühe führen, etwa so wie in den Sitzungsberichten der Berliner Math. Gesellschaft **14** (1915), S. 130—136 angedeutet ist.

[7]) Auf einem dem im Text eingeschlagenen ganz analogen Wege habe ich vor Jahren das erste Randwertproblem der Differentialgleichung (3) in dem besonderen Falle behandelt, wenn die Randfunktion stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat. (Vgl. L. Lichtenstein, Math. Annalen **67** (1909), S. 559—575, insb. S. 565—568.) Der allgemeinere Fall beliebiger stetiger Randwerte wurde auf einem anderen Wege erledigt. Wie Herr M. Gevrey zeigte, läßt sich durch einen Kunstgriff erreichen, daß man in ähnlicher Weise den Fall schlechthin stetiger Randwerte beherrschen kann. (Vgl. M. Gevrey, Annales de l'École Normale (3) **35** (1918), S. 129—190, S. insb. 145—151.

[8]) In (17) bezeichnen h und g beliebige auf S erklärte abteilungsweise stetige (oder auch nur beschränkte, im Lebesgueschen Sinne integrierbare) Funktionen.

$$\frac{\partial u(s)}{\partial n} + k(s)\frac{\partial u(s)}{\partial s} + l(s)\,u(s) = g(s) \tag{20}$$

genügen, unter $k(s)$, $l(s)$, $g(s)$ analytische und reguläre Funktionen verstanden[9]). Auch diese Aufgabe ist der soeben skizzierten Methode zugänglich. Wir nehmen an, daß die durch die Beziehung (20) charakterisierte Randwertaufgabe der Potentialtheorie unbeschränkt lösbar ist. Dann existiert, wie sich ohne Schwierigkeiten zeigen läßt, die zu der Randbedingung

$$\frac{\partial u(s)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s}(k u) + l(s)\,u = 0 \tag{21}$$

gehörige Greensche Funktion der Gleichung $\Delta u = 0$.[10]) Wir bezeichnen sie mit $\bar{\Gamma}(x, y; \xi, \eta)$ und setzen

$$u = U + w, \qquad \Delta w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial n} + k\frac{\partial w}{\partial s} + lw = g, \tag{22}$$

$$U(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_T \bar{\Gamma}(x, y; \xi, \eta)\,V(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \tag{23}$$

und erhalten zur Bestimmung von $V(x, y)$ eine zu (16) analoge Integralgleichung.

Wie leicht ersichtlich, gestatten die zweite und die dritte Randwertaufgabe auch bei drei und mehr unabhängigen Veränderlichen eine ganz ähnliche Behandlung.

2. Die bekannten Methoden zur Auflösung der ersten Randwertaufgabe der Gleichung $L(u) = f$ sowie die im vorstehenden besprochenen Ergebnisse lassen sich sinngemäß auf die partielle Differentialgleichung in der Normalform

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + du = f \tag{24}$$

übertragen. Handelt es sich jetzt um die allgemeine elliptische Differentialgleichung

$$\Delta(u) \equiv \sum_{j,k}^{1\ldots3} A_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k} + \sum_{j}^{1\ldots3} B_j\frac{\partial u}{\partial x_j} + Fu = 0 \tag{25}$$

$$(x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z;\ A_{jk} = A_{kj}),$$

unter $\sum_{j,k}^{1\ldots3} A_{jk}p_j p_k$ eine definite quadratische Form verstanden, so treten neue Schwierigkeiten auf. Wollte man nämlich (25) auf die Normalform zurückführen, so hätte man fünf Bedingungen zu erfüllen, während bei einer

[9]) Vgl. H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste **3** (1910), S. 251–293, insb. S. 251–266.

[10]) Die zu den Randbedingungen (20) und (21) gehörigen nichthomogenen Randwertaufgaben sind beide zugleich unbeschränkt lösbar oder nicht.

beliebigen Transformation der unabhängigen Variablen nur drei Funktionen verfügbar sind. Für die Behandlung der Randwertaufgaben muß man sich darum nach direkten Methoden umsehen.

Ist die erste Randwertaufgabe in der Theorie der Differentialgleichung

$$(25^*) \qquad \sum_{j,k}^{1\ldots3} A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = 0$$

erledigt, so gestattet das bekannte Verfahren der teilweisen Integration die Auflösung des gleichen Problems in der Theorie der Differentialgleichung (25) [11]).

Wie Herr W. Sternberg zeigte [12]), läßt sich das erste, und übrigens auch das zweite Randwertproblem der Differentialgleichung (25*) in Anlehnung an die Neumann-Fredholmsche Behandlung der Laplaceschen Gleichung erledigen. Eine andere Möglichkeit bietet die Verwendung eines von mir früher angegebenen kombinatorischen Verfahrens.

Wir nehmen an, daß die Koeffizienten der Gleichung (25) in einem von einer stetig gekrümmten Fläche S^* von dem Typus der Kugel begrenzten endlichen Gebiete T^* erklärt und stetig sind. Die Funktionen A_{jk} haben in T^* stetige Ableitungen der beiden ersten Ordnungen, B_j stetige Ableitungen erster Ordnung. Die partiellen Ableitungen der höchsten Ordnung sowie die Funktion F genügen in T^* einer Bedingung von der Form (2). Sei T ein von einer stetig gekrümmten Fläche S, die sich im Sinne der Analysis situs wie eine Kugel verhält, begrenztes Gebiet ganz im Innern von T^*.[13]) Sei schließlich $\varphi(s)$ irgendeine stetige oder allenfalls abteilungsweise stetige Wertfolge auf S. Zur Bestimmung derjenigen beschränkten, in T regulären Lösung der Gleichung (25), die auf S die Werte $\varphi(s)$ annimmt, gehen wir von einem speziellen, auf Bereiche, deren Durchmesser hinreichend klein ist, anwendbaren Verfahren von Herrn A. Korn aus[14]).

---

[11]) Vgl. D. Hilbert, Gött. Nachr. 1904, S. 213–259, insbes. S. 247–250; L. Lichtenstein, Journ. f. Math. **142** (1913), S. 1–40, insbes. S. 3–8.

[12]) In einer Abhandlung, die in dieser Zeitschrift veröffentlicht werden soll.

[13]) Die Fläche S läßt sich in eine endliche Anzahl Stücke zerlegen, so daß in jedem einzelnen sich entweder z als eine eindeutige Funktion von x und y darstellen läßt, die stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat, $z = z(x, y)$, oder aber eine analoge Darstellung von der Form $x = x(y, z)$ oder $y = y(x, z)$ möglich ist. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z}$, ... sollen Ungleichheiten genügen, die zu (2) analog sind.

[14]) Vgl. A. Korn, Schwarz-Festschrift, Berlin 1914, S. 215–229. An der bezeichneten Stelle wird eine Differentialgleichung von der Form (25) mit zwei unabhängigen Veränderlichen und ein Kreisgebiet betrachtet.

Sei R^* der Abstand der beiden Randflächen S und S^*, (x^0, y^0, z^0) irgendein Punkt in T oder auf S. Wir schreiben mit Herrn Korn für $\Delta(u)$

$$(26)\quad \sum_{j,k}^{1\ldots3} A_{jk}(x^0, y^0, z^0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = -\sum_{j,k}^{1\ldots3}(A_{jk}(x, y, z) - A_{jk}(x^0, y^0, z^0))\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - \sum_{j}^{1\ldots3} B_j(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x_j} - F(x, y, z)u$$

und versuchen die Lösung des ersten Randwertproblems in einem ganz in T^* gelegenen Bereiche K, dessen Rand C von demselben Charakter wie S ist, wie folgt durch sukzessive Approximationen zu bestimmen. Die linke Seite der Gleichung (26) läßt sich, wie man leicht sieht, durch eine lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten

$$(27)\qquad x = \alpha_{11}\bar{x} + \alpha_{12}\bar{y} + \alpha_{13}\bar{z}, \ldots$$

auf die Normalform

$$(28)\quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_3^2} = \sum_{j,k}^{1\ldots3} \bar{C}_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}_j \partial \bar{x}_k} + \sum_{j}^{1\ldots3} \bar{D}_j \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_j} + \bar{F}u = Q\{u\}$$
$$(\bar{x}_1 = \bar{x},\ \bar{x}_2 = \bar{y},\ \bar{x}_3 = \bar{z})$$

bringen. Augenscheinlich sind alle Koeffizienten $\bar{C}_{jk}$ für $\bar{x} = \bar{x}^0$, $\bar{y} = \bar{y}^0$, $\bar{z} = \bar{z}^0$ gleich Null. Es seien $\psi(s)$ die vorgeschriebenen stetigen Randwerte. Wir bestimmen eine Folge von Funktionen $u^{(l)}$, die in $K + C$ stetig sind, in K stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben, auf C stetig in $\psi(s)$ übergehen und den Differentialgleichungen genügen:

$$(29)\qquad \Delta u^{(1)} = 0, \quad \Delta u^{(2)} = Q\{u^{(1)}\}, \quad \Delta u^{(3)} = Q\{u^{(2)}\}, \ldots.$$

Mit Herrn Korn läßt sich zeigen, daß die Folge $u^{(l)}$ gegen eine Grenzfunktion u konvergiert, die das Randwertproblem auflöst, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

Das Gebiet K enthält (x^0, y^0, z^0) in seinem Innern oder auf dem Rande. Der Durchmesser von K übersteigt nicht eine nur von A_{jk}, B_j und F, nicht aber auch noch von $\psi(s)$ abhängige Schranke $R_0 < R^*$. Die Randfunktion hat stetige Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung, die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung genügen gewissen zu (2) analogen Ungleichheiten[15]).

Damit ist das erste Randwertproblem für Gebiete von hinreichend kleinem Durchmesser und für Randwerte, die die vorgenannten einschränken-

---

[15]) Bemerkenswerterweise führt das Kornsche Verfahren zum Ziele, auch wenn bezüglich der Koeffizienten der Differentialgleichung (25) nur vorausgesetzt wird, daß sie stetig sind und den zu (2) analogen Ungleichheiten (der Hölderschen Bedingung) genügen.

den Stetigkeitseigenschaften haben, erledigt. Es möge jetzt speziell $F < 0$ sein. Wir bezeichnen mit $\Gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ irgendeine Grundlösung der zu (25) adjungierten Differentialgleichung[16]). Das vorhin angegebene Resultat gestattet augenscheinlich die zu K gehörige Greensche Funktion $\mathfrak{H}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ der zu (25) adjungierten Gleichung herzuleiten. Als Funktion von (x, y, z) aufgefaßt, genügt $\mathfrak{H}$ der Differentialgleichung (25). Für die Lösung $u(x, y, z)$ ergibt die klassische Schlußweise der teilweisen Integration eine Formel von der Form

$$u(x, y, z) = \int_C \psi(s) \{\mathfrak{H}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\} d\omega. \tag{30}$$

In (30) bezeichnet $s = (\xi, \eta, \zeta)$ einen Punkt auf C, $d\omega$ das Flächenelement in (ξ, η, ζ), $\{\mathfrak{H}\}$ einen Differentialausdruck, der sich in bekannter Weise aus den partiellen Ableitungen erster Ordnung von $\mathfrak{H}$ in bezug auf ξ, η und ζ zusammensetzt.

Sei jetzt $\psi(s)$ eine beliebige stetige Ortsfunktion auf C, und es sei $\psi(s) = \lim_{n \to \infty} \psi_n(s)$, unter $\psi_n(s)$ Funktionen auf C verstanden, die den vorhin $\psi(s)$ auferlegten Bedingungen genügen. Ist $u_n(x, y, z)$ die zu $\psi_n(s)$ gehörige Lösung der Gleichung (25), so ist nach (30)

$$u_n(x, y, z) = \int_C \psi_n(s) \{\mathfrak{H}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\} d\omega. \tag{31}$$

Aus der Nichtexistenz eines positiven Maximums und negativen Minimums in K folgt in bekannter Weise, daß die Folge $u_n(x, y, z)$ in $K + C$ gleichmäßig konvergiert. Sei $u(x, y, z) = \lim u_n(x, y, z)$. Aus (31) folgt durch Grenzübergang, für alle (x, y, z) in jedem ganz in K enthaltenen Bereiche $\overline{K}$ gleichmäßig,

$$u(x, y, z) = \int_C \psi(s) \{\mathfrak{H}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\} d\omega. \tag{32}$$

Da $\{\mathfrak{H}\}$ in K stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat, so gilt für $u(x, y, z)$ das gleiche. Da $\{\mathfrak{H}\}$ in K der Gleichung (25) genügt, so ist auch u eine Lösung von (25). Augenscheinlich ist $u(x, y, z)$ die gesuchte, zu den Randwerten $\psi(s)$ gehörige Lösung[17]).

Von diesem auf Gebiete von hinreichend kleinem Durchmesser bezüglichen Resultat gelangt man zu der Auflösung des eingangs gestellten

---

[16]) Die Existenz der fraglichen Grundlösung ist unter den Voraussetzungen des Textes von E. E. Levi dargetan worden. Vgl. E. E. Levi, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **24** (1907), S. 275–317.

[17]) Das gleiche Verfahren führt zum Ziele, auch wenn $\psi(s)$ abteilungsweise stetig ist.

Problems durch ein kombinatorisches Verfahren, das auch an sich nicht ohne Interesse ist und sonst von Nutzen sein könnte[18]).

Es seien K_1 und K_2 zwei Bereiche in T^*, die alle vorhin zusammengestellten Bedingungen (im folgenden kurz Bedingungen I genannt) erfüllen und darüber hinaus wie folgt beschaffen sind. Sie haben einen einfach zusammenhängenden Bereich gemeinsam. Sowohl der Durchschnitt $\mathfrak{K}$ als auch die Summe K von K_1 und K_2 genügen den Bedingungen I. Jedoch braucht der Durchmesser von $K_1 + K_2$ nicht notwendig kleiner als R_0 zu sein. Der im Innern von K liegende Teil $\bar{C}_2$ der Randfläche C_2 von K_2 und der im Innern von K_2 liegende Teil $\bar{C}_1$ von C_1 haben einen von Null verschiedenen Abstand voneinander. In der nebenstehenden Fig. 1 ist die Lage der beiden Bereiche an Hand eines zweidimensionalen Bildes schematisch dargestellt. Sei schließlich C der Gesamtrand von $K = K_1 + K_2$, ferner $\bar{C}_1 = C_1 - \bar{C}_1$, $\bar{\bar{C}}_2 = C_2 - \bar{C}_2$.

Es möge nun auf C eine stetige Wertfolge $\varphi(s)$ vorgegeben sein. Gesucht wird diejenige in $K + C$ stetige, in K reguläre Lösung $u(x, y, z)$ der Differentialgleichung (25), die auf C die Werte $\varphi(s)$ annimmt. Wir nehmen an, daß die gesuchte Lösung existiert; ihre vorerst noch nicht bekannten Werte auf $\bar{C}_1$ und C_2 sollen $\bar{u}_1(s)$ und $\bar{u}_2(s)$ heißen. Sei $\mathfrak{H}_1$ bzw. $\mathfrak{H}_2$ die zu K_1 bzw. K_2 gehörige Greensche Funktion der zu (25) adjungierten Differentialgleichung. Nach (32) ist

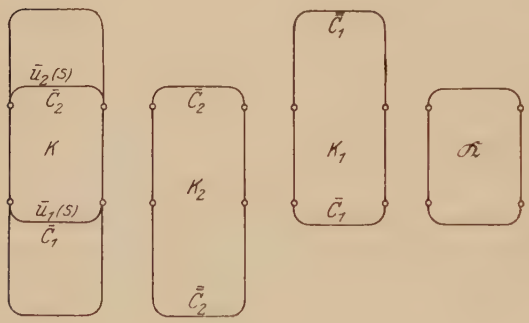


Fig. 1.

$$(33)\quad \begin{cases} \bar{u}_1(s) = \int\limits_{C_2} \bar{u}_2(t)\{\mathfrak{H}_2(s;t)\}\, d\omega(t) + \int\limits_{C_2} \varphi(t)\{\mathfrak{H}_2(s;t)\}\, d\omega(t), \\ \bar{u}_2(s) = \int\limits_{C_1} \bar{u}_1(t)\{\mathfrak{H}_1(s;t)\}\, d\omega(t) + \int\limits_{C_1} \varphi(t)\{\mathfrak{H}_1(s;t)\}\, d\omega(t). \end{cases}$$

Hier bezeichnet $d\omega(t)$ das Flächenelement im Punkte t, $\{\mathfrak{H}_1(s,t)\}$ den Wert des Ausdruckes $\{\mathfrak{H}_1(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\}$ für (x, y, z) in s und (ξ, η, ζ) in t. Die Beziehungen (33) bilden ein System von zwei simultanen linearen Integralgleichungen mit stetigen Kernen. Sei $\bar{u}_1(s)$, $\bar{u}_2(s)$ das System

[18]) Vgl. L. Lichtenstein, Prace Mat. Fiz., Warschau, **21** (1910), S. 7–16; Bulletin de l'Académie de Sciences de Cracovie 1911, S. 219–254; Journal für Math. **143** (1913), S. 51–105; Math. Enc. II C 3, S. 272.

ihrer Lösungen oder ein System der Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichungen[19]). In allen Punkten, in denen $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_1$ zusammenstoßen, ist

$$\int_{\bar{C}_2} \bar{u}_2(t)\{\mathfrak{H}_2\}\,d\omega(t) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{C_2} \varphi(t)\{\mathfrak{H}_2\}\,d\omega(t) = \varphi(s) \text{ bzw. } 0,$$

darum $\bar{u}_1(s) = \varphi(s)$ oder 0, das letztere, falls die homogenen Gleichungen von Null verschiedene Lösungen haben. Also schließt sich $\bar{u}_1(s)$ an $\varphi(s)$ bzw. 0 stetig an. Das gleiche gilt für $\bar{u}_2(s)$.

Es mögen etwa die nichthomogenen Integralgleichungen (33) stets eindeutig auflösbar sein. Durch die Formeln

$$(34)\quad \begin{cases} u_2(x,y,z) = \int_{\bar{C}_2} \bar{u}_2(t)\{\mathfrak{H}_2(x,y,z;t)\}\,d\omega(t) \\ \qquad\qquad + \int_{C_2} \varphi(t)\{\mathfrak{H}_2(x,y,z;t)\}\,d\omega(t), \\ u_1(x,y,z) = \int_{\bar{C}_1} \bar{u}_1(t)\{\mathfrak{H}_1(x,y,z;t)\}\,d\omega(t) \\ \qquad\qquad + \int_{C_1} \varphi(t)\{\mathfrak{H}_1(x,y,z;t)\}\,d\omega(t) \end{cases}$$

sind zwei entsprechend in K_2 und K_1 reguläre, in $K_2 + C_2$ bzw. $K_1 + C_1$ stetige Lösungen der Differentialgleichung (25) erklärt, die wegen (33) auf dem Rande $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{K}$, mithin wegen $F < 0$ gewiß auch in $\mathfrak{K}$ selbst übereinstimmen. Setzt man jetzt

$$(35)\quad u(x,y,z) = \begin{cases} u_1(x,y,z) \text{ in } K_1, \\ u_2(x,y,z) \text{ in } K_2, \end{cases}$$

so ist $u(x,y,z)$ augenscheinlich eine in $K + C$ stetige, in K reguläre Lösung der Gleichung (25), die auf C die Werte $\varphi(s)$ annimmt. — Wären die zu (33) gehörigen homogenen Integralgleichungen lösbar, so würden wir in ähnlicher Weise zu einer in K regulären, auf C verschwindenden Lösung gelangen, die auf $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_2$ nicht identisch gleich Null wäre, was wegen $F < 0$ nicht möglich ist. Damit ist das erste Randwertproblem unter Zugrundelegung beliebiger stetiger Randwerte und des Gebietes $K = K_1 + K_2$ erledigt. Man kann jetzt offenbar auch die zu K gehörige Greensche Funktion $\mathfrak{H}(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$ der zu (25) adjungierten Differentialgleichung konstruieren, und erhält für $u(x,y,z)$ den Ausdruck

$$(36)\quad u(x,y,z) = \int_C \varphi(s)\{\mathfrak{H}(x,y,z;s)\}\,d\omega.$$

Es steht jetzt nichts im Wege, den vorhin durchgeführten Prozeß der Gebietsverschmelzung beliebig oft zu wiederholen. Man gelangt so zuerst

[19]) Wie sich bald zeigen wird, sind die nichthomogenen Gleichungen (33) stets eindeutig auflösbar.

zu ringförmigen Gebieten. In der Fig. 2 ist, wieder an Hand eines zweidimensionalen Schemas, ein Gebiet dieser Art mit dem „Schlußstein“ des Verschmelzungsprozesses dargestellt. Aus Ringen lassen sich in analoger Weise schalenartige Gebiete, für die das erste Randwertproblem gelöst

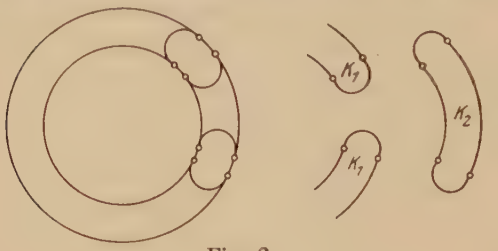


Fig. 2.

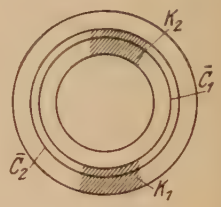


Fig. 3.

werden kann, zusammensetzen. In der Fig. 3 ist die hierbei in Betracht kommende „gürtelförmige“ Verschmelzung dargestellt. Es ist jetzt leicht einzusehen, wie man durch passende Aneinanderfügung dieser schalenartigen Elemente zu dem vorgegebenen Gebiete T selbst gelangen kann.

Wir haben vorhin $F < 0$ vorausgesetzt. Sei jetzt F beliebig. Wir schreiben für (25)

$$\tilde{A}(u) \equiv \sum_{j=k}^{1\ldots3} A_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j}^{1\ldots3} B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + F_0 u = (F_0 - F) u, \tag{37}$$

$$F_0 < 0 \tag{38}$$

und erhalten zur Bestimmung derjenigen in $T + S$ stetigen, in T regulären Lösung von (25), die auf S die Werte $\varphi(s)$ annimmt, in bekannter Weise die Formel

$$u(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi} \int_T \tilde{\mathfrak{G}}(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)\,[F_0 - F(\xi,\eta,\zeta)]\,u(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta + \tilde{u}(x,y,z). \tag{39}$$

Hier bezeichnet $\tilde{\mathfrak{G}}$ die Greensche Funktion der zu $\tilde{A}(u) = 0$ adjungierten Differentialgleichung, $\tilde{u}(x, y, z)$ diejenige Lösung der Gleichung $\tilde{A}(u) = 0$, die auf S die vorgeschriebenen Werte annimmt. Die Behandlung der Integralgleichung (39) führt auf die aus der Theorie der Gleichung (24) bekannten Alternative.

Das in dem Vorstehenden auseinandergesetzte kombinatorische Verfahren führt auch bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten sowie bei Gebieten, deren Rand aus mehreren Komponenten besteht, zum Ziele. Auch sind die zweite Randwertaufgabe sowie verschiedene höhere Randwertaufgaben einer analogen Behandlung zugänglich.

II. Allgemeine Eigenschaften der Lösungen.

3. In diesem und den folgenden Abschnitten wird angenommen, daß die Koeffizienten der Gleichung $L(u) = 0$ in einem Gebiete T_* erklärt sind, das $T + S$ (in seinem Innern) enthält, und daß a und b stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzen, c stetige Ableitungen erster Ordnung hat. Wenn nichts anderes vermerkt ist, wird ferner angenommen, daß jede Komponente des Randes stetig gekrümmt ist. Nach A. Paraf kann, wenn $c < 0$ ist, eine in T reguläre Lösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$ daselbst weder positive Maxima noch negative Minima haben[20]). Ist in T überall $c = 0$, so können in dem betrachteten Gebiete überhaupt weder Maxima noch Minima vorkommen[21]). Unabhängig von dem Vorzeichen von c gilt die Eigenschaft, daß Lösungen der Differentialgleichung $L(u) = 0$ in einem Punkte des Regularitätsgebietes, in dem sie verschwinden, weder ein Maximum noch ein Minimum (selbst in dem weiteren, durch die Zeichen $\geqq$ bzw. $\leqq 0$ charakterisierten Sinne) haben können. Insbesondere können sie also in ihrem Regularitätsgebiete keine isolierte Nullstellen haben[22]).

Der soeben erwähnte Parafsche Satz läßt sich nun wie folgt verschärfen. *Ist $c \leqq 0$, so kann eine Lösung der Gleichung $L(u) = 0$ in ihrem Regularitätsgebiete nur positive Minima sowie negative Maxima haben.*

Augenscheinlich braucht nur bewiesen zu werden, daß positive Maxima und negative Minima nicht möglich sind. Es möge im Gegensatz hierzu (x_0, y_0) ein Punkt in T sein, in dem eine in T reguläre Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung $L(u) = 0$ ein positives Maximum habe. In einem hinreichend kleinen Kreisgebiete K um (x_0, y_0) ist also

$$0 < u(x, y) \leqq u(x_0, y_0). \tag{40}$$

Sei $\mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta)$ die zu K gehörige, am Rande verschwindende Greensche Funktion der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{41}$$

und es möge $v(x, y)$ diejenige Lösung dieser Gleichung bezeichnen, die auf dem Rande C von K gleich $u(x, y)$ ist. Es gilt offenbar

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_K \mathfrak{G}(\xi, \eta; x, y)\, c(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + v(x, y). \tag{42}$$

---

[20]) Vgl. A. Paraf, Annales de Toulouse (1) **6** (1892), H, S. 1–75.

[21]) Vgl. L. Lichtenstein, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo a) **33** (1912), S. 201–211; b) **34** (1912), S. 278–279, insb. a) S. 210–211.

[22]) S. loc. cit.[21]) S. 210. Von dem, nur für $c \equiv 0$ möglichen, trivialen Falle, $u \equiv 0$ wird hierbei abgesehen.

Da nun $v(x_0, y_0) \leqq \operatorname{Max} u(x, y)$ auf C ist, und in K

$$\overline{\mathfrak{G}}(\xi, y; x_0, y_0) > 0, \qquad c(\xi, \eta) \leqq 0, \qquad u(\xi, \eta) > 0 \tag{43}$$

gilt, so wäre demnach gegen die Voraussetzung

$$u(x_0, y_0) \leqq \operatorname{Max} u(x, y) \text{ auf } C. \tag{44}$$ [23])

Analoge Sätze gelten für elliptische Differentialgleichungen von der Form

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0, \quad AC - B^2 > 0. \tag{45}$$

4. Nach bekannten Sätzen ist, wenn $G(x, y; \xi, \eta)$ die klassische Greensche Funktion der Potentialtheorie bezeichnet, für alle (x, y) in T und alle s auf S

$$\frac{\partial}{\partial n} G(x, y; s) > 0. \text{ [24])} \tag{46}$$

Es möge jetzt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0 \tag{47}$$

vorliegen, und es sei in $T \ldots c \leqq 0$. Insbesondere kann es sich also um die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{48}$$

handeln. *Sei* $\mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta)$ *die zu* T *gehörige, auf* S *verschwindende Greensche Funktion der Gleichung* (47) *bzw.* (48). *Wir zeigen, daß*

$$\frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{G}(x, y; s) > 0 \tag{49}$$

ist.

Vor allem ist wegen der in **3.** betrachteten Eigenschaften der Differentialgleichung (47) bzw. (48) sicher

$$\frac{\partial}{\partial n} \mathfrak{G}(x, y; s) \geqq 0. \tag{50}$$

---

[23]) Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn $u(x, y)$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) gleich $u(x_0, y_0)$, mithin $c \equiv 0$ ist.

[24]) Vgl. C. Neumann, Über die Methode des arithmetischen Mittels. Zwei Abhandlungen, Leipzig 1887/88 (aus dem 13. und 14. Bande der Abh. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Nr. IX und XIII), zweite Abhandlung, S. 662–705. Einen besonders einfachen Beweis habe ich vor einiger Zeit gegeben. Vgl. L. Lichtenstein, Math. Zeitschrift **11** (1921), S. 319–320. Dort findet sich in der Fußnote [1]) die weitere Literatur.

Sei s_0 ein beliebiger Punkt auf S. Wie sich zeigen läßt, kann man gewiß einen Punkt (x_0, y_0) auf der Normalen (n_0) in s_0 zu S finden, so daß

$$\frac{\partial}{\partial n_0}\mathfrak{G}(x_0, y_0; s_0) > 0 \tag{51}$$

ist.

Es genügt hierzu der Abstand d_0 des Punktes (x_0, y_0) von s_0 hinreichend klein zu wählen, etwa $d_0 \leqq \delta_0$.[25]) Sei (x_1, y_1) ein Punkt auf der Normalen (n_0) zwischen (x_0, y_0) und s_0 im Abstande d_1 von (x_0, y_0), K der Halbkreis von (x_1, y_1) durch (x_0, y_0), der n_0 zur Symmetrielinie hat, und n_1, n_2 die beiden zu n_0 parallelen Tangenten an K_1. Für hinreichend kleine d_1 treffen diese Tangenten S in je einem Punkte. Sei T das Gebiet, das zurückbleibt, wenn man aus T den von K_1, n_1, n_2 und einem Stück von S begrenzten Teil T^* entfernt; sein Rand heiße $\bar{S}$. Nach bekannten Sätzen ist $\frac{\partial}{\partial n_0}\mathfrak{G}(x, y; s_0)$, als Funktion von x und y aufgefaßt, eine in $\bar{T}+\bar{S}$ stetige, in $\bar{T}$ reguläre Lösung der zu (47) bzw. (48) adjungierten Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-a\frac{\partial u}{\partial x}-b\frac{\partial u}{\partial y}+\left(c-\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}\right)u=0 \tag{52}$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-a\frac{\partial u}{\partial x}-b\frac{\partial u}{\partial x}+\left(-\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y}\right)u=0. \tag{53}$$

Rückt (x, y) auf $\bar{S}$, so wird $\frac{\partial}{\partial n_0}\mathfrak{G}(x, y; s_0)$ auf dem zu T gehörenden Teile des Randes von $\bar{T}$ gleich Null, auf dem zu T^* gehörenden Teile $\geqq 0$, wobei positive Werte tatsächlich vorkommen. Wie aus (50) folgt, ist diese Funktion in $\bar{T}$ gewiß nicht negativ. Würde sie in einem Punkte (x^*, y^*) in T verschwinden, so müßte sie demnach dort ein Minimum (ev. im weiteren Sinne) annehmen oder aber in $\bar{T}$ identisch verschwinden. Die zuerst erwähnte Möglichkeit ist einem in **3.** genannten Satze zufolge

---

[25]) Dies folgt beispielsweise leicht aus einem Satze über das asymptotische Verhalten der Funktion $\mathfrak{G}$ am Rande des Definitionsgebietes, den ich vor einigen Jahren bewiesen habe (vgl. L. Lichtenstein, Journ. f. Math. **143** (1913), S. 51—105). Sei $(\bar{x}, \bar{y})$ derjenige Punkt auf der Normalen n_0 außerhalb von T, der von s_0 den gleichen Abstand, d_0, wie (x_0, y_0) hat, und es sei $\varrho^2=(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2$, $\bar{\varrho}^2=(\bar{x}-\xi)^2+(\bar{y}-\eta)^2$. Es gilt dann für alle hinreichend kleinen d_0 und alle (ξ, η) in einer Nachbarschaft von s_0

$$\mathfrak{G}(x_0, y_0; \xi, \eta)=\log\frac{\bar{\varrho}}{\varrho}+\bar{\mathfrak{g}}(x_0, y_0; \xi, \eta),$$

unter $\bar{\mathfrak{g}}$ eine beschränkte Funktion verstanden, die so beschaffen ist, daß $\left(\frac{\partial\bar{\mathfrak{g}}}{\partial\xi}\right)\left(\log\frac{1}{\varrho}\right)^{-1}$, $\left(\frac{\partial\bar{\mathfrak{g}}}{\partial\eta}\right)\left(\log\frac{1}{\varrho}\right)^{-1}$ beschränkt sind.

ausgeschlossen, die zuletzt betrachtete führt wegen (51) auf einen Widerspruch. Also ist die Ungleichheit (49) für alle (x, y) in $\overline{T}$ erfüllt und, weil (51) für alle s_0 auf S und alle $d_0 \leqq \delta_0$ gilt, allgemein zutreffend.

Sei T jetzt allgemeiner ein beschränktes, einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Begrenzung aus einer endlichen Anzahl Stücke stetig gekrümmter Kurven besteht, die endlich viele Ecken oder Spitzen miteinander einschließen[26]). Wie man sich leicht überzeugt, bleiben die vorstehenden Überlegungen für alle Punkte s des Randes, in denen die Krümmung stetig ist, in Kraft.

Sei $A = (\xi_a, \eta_a) = (s_a)$ ein Eckpunkt oder eine Spitze, und es möge der Innenwinkel in A kleiner als π sein. Es gibt dann gewiß stetig gekrümmte Gebiete $\dot{T}$, die das Gebiet T in ihrem Innern, den Eckpunkt A aber auf dem Rande enthalten. Sei $\dot{\mathfrak{G}}(x, y; \xi, \eta)$ die zu einem Gebiete dieser Art gehörige am Rande verschwindende Greensche Funktion der Differentialgleichung (47) bzw. (48). Es gilt

$$\mathfrak{G}(x, y; s_a) = \dot{\mathfrak{G}}(x, y; s_a) = 0 \tag{54}$$

und, für alle (ξ, η) in T,

$$\mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta) < \dot{\mathfrak{G}}(x, y; \xi, \eta). \tag{55}$$

Aus (54) und (55) folgt

$$0 < \frac{1}{h}[\mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta) - \mathfrak{G}(x, y; s_a)] < \frac{1}{h}[\dot{\mathfrak{G}}(x, y; \xi, \eta) - \dot{\mathfrak{G}}(x, y; s_a)]. \tag{56}$$

Der Differenzenquotient $\frac{1}{h}[\mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta) - \mathfrak{G}(x, y; s_a)]$ *ist also beschränkt und positiv.*

5. *Das in* **4.** *abgeleitete Resultat läßt sich auf eine beliebige elliptische Differentialgleichung* $L(u) = 0$ *bzw.* (45) *ausdehnen, wenn das der Betrachtung zugrunde liegende Gebiet* $\tilde{T}$ *„hinreichend klein" ist, z. B. wenn der Durchmesser von* $\tilde{T}$ *unterhalb einer endlichen, von* a, b, c *abhängigen Schranke liegt.*

Es möge das Vorzeichen von c beliebig sein. Wir setzen $u = z(x)v$, unter $z(x)$ eine sogleich zu bestimmende analytische und reguläre Funktion verstanden, und erhalten für v eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a' \frac{\partial v}{\partial x} + b' \frac{\partial v}{\partial y} + c' v = 0, \tag{57}$$

$$a' = a + \frac{2}{z}\frac{dz}{dx}, \quad b' = b, \quad c' = c + \frac{a}{z}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{z}\frac{d^2 z}{dx^2}. \tag{58}$$

[26]) Es genügt übrigens vorauszusetzen, daß die einzelnen Seiten der Begrenzung stetige Tangente haben und $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ zu (1) analoge Ungleichheiten erfüllen.

Wir fragen, ob man z so bestimmen kann, daß

$$z > 0, \quad \frac{dz}{dx} > 0, \quad c' < 0 \tag{59}$$

wird?

Es sei (x_0, y_0) ein beliebiger Punkt in T und es sei

$$\alpha = \mathrm{Max}\,|a|, \quad \gamma = \mathrm{Max}\,|c| \tag{60}$$

in $T_* + S_*$. Es mögen ferner β_1, β_2 beliebige positive Zahlen bezeichnen. Wir bestimmen eine Lösung ζ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = -\alpha\frac{d\zeta}{dx} - \gamma\zeta - \beta_1, \tag{61}$$

welche für $x = x_0$ den Bedingungen $\zeta = 1$, $\frac{d\zeta}{dx} = \beta_2$ genügt. In einem gewissen, den Wert $x = x_0$ einschließenden Intervalle $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ist die Lösung ζ gewiß analytisch und regulär und nebst ihrer Ableitung $\frac{d\zeta}{dx}$ positiv. Setzt man $z = \zeta$, so wird in der Kreisfläche vom Radius ε um (x_0, y_0) gewiß $c' < 0$.[27])

Sei $\tilde{T}$ irgendein von stetig gekrümmten Kurven $\tilde{S}$ begrenztes einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet in $T + S$, dessen Durchmesser $\leqq \varepsilon$ ist. Sei $\tilde{\mathfrak{H}}(x, y; \xi, \eta)$ die zu $\tilde{T}$ gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung (57). Wegen $c' < 0$ ist nach **4.** gewiß

$$\frac{\partial}{\partial n}\tilde{\mathfrak{H}}(x, y; \xi, \eta) > 0. \tag{62}$$

Man überzeugt sich leicht, daß

$$\tilde{\mathfrak{G}}(x, y; \xi, \eta) = \frac{z(\xi)}{z(x)}\tilde{\mathfrak{H}}(x, y; \xi, \eta) \tag{63}$$

die zu $\tilde{T}$ gehörige Greensche Funktion der Gleichung $L(u) = 0$ darstellt. Wie behauptet, ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n}\tilde{\mathfrak{G}}(x, y; s) &= \frac{z(\xi)}{z(x)}\frac{\partial}{\partial n}\tilde{\mathfrak{H}}(x, y; s) + \frac{1}{z(x)}\frac{\partial}{\partial n}z(\xi)\cdot\tilde{\mathfrak{H}}(x, y; s) \\ &= \frac{z(\xi)}{z(x)}\frac{\partial}{\partial n}\tilde{\mathfrak{H}}(x, y; s) > 0.\end{aligned} \tag{64}$$

[28])

6. Sei $\mathfrak{T}$ irgendein beschränktes zweifach zusammenhängendes Gebiet in T_*, dessen beide Randkurven stetig gekrümmt sind. Wir betrachten diejenige Lösung $\mathfrak{U}(x, y)$ der Differentialgleichung (48), die auf der Außen-

[27]) Übrigens gilt das gleiche in dem von den beiden Geraden $x = x_0 - \varepsilon$, $x = x_0 + \varepsilon$ begrenzten Parallelstreifen.

[28]) Der Satz gilt augenscheinlich für alle Gebiete $\tilde{T}$ in $T + S$, die sich in einem beliebigen (nicht notwendig zu der y-Achse parallelen) Parallelstreifen von der Breite 2ε unterbringen lassen.

begrenzung $\mathfrak{S}_0$ den Wert 0, auf der Innenbegrenzung $\mathfrak{S}_1$ den Wert 1 annimmt, und beweisen, *daß auf* $\mathfrak{S}_0 \ldots \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n} > 0$, *auf* $\mathfrak{S}_1$ *aber* $\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n} < 0$ *ist.*

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{T}_0$ bzw. $\mathfrak{T}_1$ die entsprechend von $\mathfrak{S}_0$ bzw. $\mathfrak{S}_1$ begrenzten beschränkten (einfach zusammenhängenden) Gebiete. Sei (X, Y) irgendein Punkt in $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{G}_0(X, Y; x, y)$ die zu $\mathfrak{T}_0$ gehörige, auf $\mathfrak{S}_0$ verschwindende Greensche Funktion von (48). Augenscheinlich ist $\mathfrak{G}_0$ in $\mathfrak{T}_0$ und insbesondere auf $\mathfrak{S}_1$ positiv. Sei p_1 der Höchstwert von $\mathfrak{G}_0$ auf $\mathfrak{S}_1$. Die Differenz

$$\mathfrak{V}(x, y) = \mathfrak{U}(x, y) - \frac{1}{p_1}\mathfrak{G}_0(X, Y; x, y) \tag{65}$$

ist eine Lösung der Gleichung (48) und ist auf $\mathfrak{S}_1$ gewiß $\geqq 0$.[29]) Nach **3.** ist auf $\mathfrak{S}_0$ gewiß

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n} \geqq 0, \tag{66}$$

da aber zugleich

$$\frac{\partial \mathfrak{G}_0}{\partial n} > 0 \tag{67}$$

ist, so gilt, wie behauptet,

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n} > 0. \tag{68}$$

Die vorstehenden Überlegungen und somit auch das Schlußresultat bleiben in Kraft, wenn auf $\mathfrak{S}_1$ beliebige *positive* Randwerte vorgeschrieben sind. Ist $0 < m_1 = \operatorname{Min} \mathfrak{U}(x, y)$ auf $\mathfrak{S}_1$, so hat man diesmal $\mathfrak{V}(x, y)$ durch

$$\overline{\mathfrak{V}}(x, y) = \mathfrak{U}(x, y) - \frac{m_1}{p_1}\mathfrak{G}_0(X, Y; x, y)$$

zu ersetzen[30]).

Nunmehr die Randlinie $\mathfrak{S}_1$. Offenbar ist $1 - \mathfrak{U}(x, y)$ diejenige Lösung der Gleichung (48), die auf $\mathfrak{S}_0$ den Wert 1, auf $\mathfrak{S}_1$ den Wert 0 annimmt. Nimmt man eine geeignete Transformation durch reziproke Radien vor, so geht $\mathfrak{T}$ in ein neues ringförmiges Gebiet über, wobei $\mathfrak{S}_0$ die äußere, $\mathfrak{S}_1$ die innere Begrenzungskurve entspricht. Die Differentialgleichung (48) wird dabei in eine Gleichung von gleicher Form transformiert. Wendet man auf das neue Gebiet und die neue Differentialgleichung das Resultat (68) an, so findet man leicht, daß auf $\mathfrak{S}_1$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n} < 0 \tag{69}$$

ist.

---

[29]) Das Gleichheitszeichen gilt auf $\mathfrak{S}_1$ ausnahmslos, wenn $\mathfrak{S}_1$ gerade eine Niveaulinie von $\mathfrak{G}_0(X, Y; x, y)$ ist.

[30]) Das Ergebnis (68) gilt übrigens auch für die allgemeinere Differentialgleichung (47).

Als spezielles Resultat ist in (68) und (69) der folgende bekannte Satz der Potentialtheorie enthalten. *Ist* $\mathfrak{u}(x, y)$ *diejenige in* $\mathfrak{T}$ *reguläre Potentialfunktion, die auf* $\mathfrak{S}_0$ *verschwindet und auf* $\mathfrak{S}_1$ *den Wert* 1 *hat, so ist auf* $\mathfrak{S}_0$ *durchweg* $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial n} > 0$, *auf* $\mathfrak{S}_1$ *überall* $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial n} < 0$. Dieses Ergebnis besagt u. a., daß die Ladungsdichte in einem beliebigen Zylinderkondensator, dessen Randkurven stetig gekrümmt sind, nirgends verschwindet, also auf jeder der beiden Belegungen konstantes Vorzeichen hat. Die Beziehungen $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial n} > 0$ auf $\mathfrak{S}_0$, $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial n} < 0$ auf $\mathfrak{S}_1$ werden bei der konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete auf Kreisringgebiete gebraucht.

7. Es möge sich jetzt wieder um die Differentialgleichung (48) und das Gebiet $\mathfrak{T}$ der Nr. **6** handeln. Bezüglich der Randwerte $\varphi(s)$ auf $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}_1$ wird diesmal folgendes vorausgesetzt: Sie sind nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig, auf $\mathfrak{S}_1$ positiv, auf $\mathfrak{S}_0$ nicht negativ, dabei auf $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_1$ nicht konstant. Das Minimum aller Randwerte $m_0^* = \text{Min}\, \varphi(s) \geqq 0$ wird in einem Punkte (allgemeiner einer Punktmenge) auf $\mathfrak{S}_0$ erreicht. Es kann dabei auch eintreten, daß die Randfunktion Konstanzintervalle hat, und in diesen gerade den Wert m_0^* annimmt.

Ist jetzt $\mathfrak{U}^*(x, y)$ *diejenige im Innern und auf dem Rande von* $\mathfrak{T}$ *stetige, in* $\mathfrak{T}$ *reguläre Lösung der Differentialgleichung* (48), *die auf* $\mathfrak{S}$ *die vorgeschriebenen Werte annimmt, so ist in allen Randpunkten, in denen* $\varphi(s) = m_0^*$ *ist,*

$$\frac{\partial \mathfrak{U}^*}{\partial n} > 0. \tag{70}$$

Der Beweis wird wie bei den analogen Betrachtungen in **6.** geführt. Sei (X, Y) ein Punkt in $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{G}_0(X, Y; x, y)$, wie in **6.**, die zu $\mathfrak{T}_0$ gehörige, auf $\mathfrak{S}_0$ verschwindende Greensche Funktion der Differentialgleichung (48), N eine feste positive Zahl. Die Funktion

$$\mathfrak{V}^*(x, y) = \mathfrak{U}^*(x, y) - \frac{1}{N}\, \mathfrak{G}_0(X, Y; x, y) \tag{71}$$

ist eine im Innern und auf dem Rande von $\mathfrak{T}$ stetige, in $\mathfrak{T}$ reguläre Lösung der Gleichung (48), die auf $\mathfrak{S}_0$ dieselben Werte wie $\mathfrak{U}^*$ annimmt. Für hinreichend große N wird gewiß das Minimum aller Randwerte von $\mathfrak{V}^*$ in denjenigen Randpunkten erreicht, wo $\mathfrak{U}^*$ Minimum wird. In jenen Punkten ist gewiß

$$\frac{\partial \mathfrak{V}^*}{\partial n} \geqq 0, \tag{72}$$

mithin wegen $\frac{\partial \mathfrak{G}_0}{\partial n} > 0$, wie behauptet,

$$\frac{\partial \mathfrak{U}^*}{\partial n} > 0. \tag{73}$$

Wir sind jetzt in der Lage, ein analoges Resultat für einfach zusammenhängende, stetig gekrümmte Gebiete abzuleiten. Es sei T ein Gebiet dieser Art, und es möge $v(x, y)$ eine in T und auf dem Rande S von T stetige, in T reguläre Lösung von (48) bezeichnen. Bezüglich der Randwerte $\varphi(s)$ von $u(x, y)$ wird vorausgesetzt, daß sie nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig und nicht konstant sind. Sei schließlich $m_* = \text{Min } \varphi(s)$ auf S. *In allen Punkten, in denen* $\varphi(s) = m_*$ *ist, ist*

$$\frac{\partial u}{\partial n} > 0. \tag{74}$$

Da $u(x, y) + C$ (C konstant) ebenfalls eine Lösung von (48) ist, so kann man die Randwerte als nichtnegativ voraussetzen. Sei A ein Punkt auf S, in dem die Randwerte das Maximum erreichen. In der Nähe von A kann man in T gewiß einen kleinen Kreis beschreiben, so daß auf diesem die Werte von $u(x, y)$ immer noch größer als m_* sind. In dem zweifach zusammenhängenden Bereiche, der von S und jenem Kreise begrenzt ist, erfüllt $u(x, y)$ alle Voraussetzungen des vorhin bewiesenen Satzes, also ist, in der Tat, in allen Punkten auf S, in denen $\varphi(s) = m_*$ ist,

$$\frac{\partial u}{\partial n} > 0. \tag{75}$$

Leipzig, den 27. Juli 1923.

(Eingegangen am 27. Juli 1923.)

Über die Äquivalenz des Perronschen[1]) und des Denjoyschen[2]) Integralbegriffes.

Von

Paul Alexandroff in Moskau.

1. Unter einer im Perronschen Sinne integrierbaren Funktion ist bekanntlich eine meßbare, fast überall endliche Funktion $f(x)$ zu verstehen, die der folgenden Konstruktion fähig ist:

Man denke etwa an das Intervall $a \leqq x \leqq b$ *und betrachte alle daselbst stetigen Funktionen* $\varphi(x)$ *bzw.* $\psi(x)$, *die folgende Eigenschaften besitzen:*

$$\text{(I)} \qquad \begin{array}{ll} \bar{D}\,\varphi(x) \leqq f(x), & \underline{D}\,\psi(x) \geqq f(x), \\ \bar{D}\,\varphi(x) \neq +\infty, & \underline{D}\,\psi(x) \neq -\infty, \\ \multicolumn{2}{c}{\varphi(a) = \psi(a) = 0,} \end{array}$$

wo $D\,\varphi(x) = \overline{\lim_{h \to 0}} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$, $\underline{D}\,\psi(x) = \underline{\lim_{h \to 0}} \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h}$ *und* x *ein Punkt des Intervalles* $a \leqq x \leqq b$ *ist.*

Wenn dann

$$\underline{\lim}\, \psi(x) = \overline{\lim}\, \varphi(x) = F(x)$$

ist, so sagen wir, $F(x)$ *sei das unbestimmte Perronsche Integral der Funktion* $f(x)$.

$F(b)$ *ist dann das bestimmte Perronsche Integral* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Es ist sofort klar, daß

1. $F(x)$ eine im ganzen Intervalle $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion mit dem Anfangswerte $F(a) = 0$ ist,

[1]) O. Perron, Heidelberger Sitzungsberichte 1914. — H. Bauer, Monatsh. f. Math. u. Phys. 1915. — H. Hake, Math. Ann. **83**.

[2]) Comptes rendus **154** (1912), S. 859 und 1075.

2. die Differenzen $\sigma(x) = \psi(x) - F(x)$ und $\varrho(x) = F(x) - \varphi(x)$ im ganzen Intervalle $a \leqq x \leqq b$ nicht abnehmende stetige Funktionen sind mit $\sigma(a) = \varrho(a) = 0$.

Außerdem ist es bekannt, daß, damit die stetige Funktion $F(x)$ mit dem Anfangswerte $F(a) = 0$ das unbestimmte Perronsche Integral der Funktion $f(x)$ sei, notwendig und hinreichend ist, daß es zu jedem positiven ε ein Paar der Bedingung (I) genügenden stetigen Funktionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ gibt, die noch die folgende Nebenbedingung erfüllen:

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} 0 &< \psi(x) - F(x) < \varepsilon, \\ 0 &< F(x) - \varphi(x) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Die der Bedingung (II) genügenden Funktionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ werden, wie bekannt, zu $F(x)$ ε-adjungierte Ober- bzw. Unterfunktionen genannt [3]).

Nun ist folgendes bisher bewiesen:

1. Eine beschränkte Funktion ist im Perronschen Sinne dann und nur dann integrierbar, wenn sie meßbar, folglich im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist.

2. Eine im Denjoyschen Sinne integrierbare Funktion ist stets im Perronschen Sinne integrierbar.

Der letzte Satz ist von Herrn Hake 1920 in den Math. Ann. Bd. 8[illegible] veröffentlicht worden; ohne diese Arbeit zu kennen, habe ich denselben Satz auf einem ganz anderen und, wie mir scheint, viel kürzeren Wege gefunden. Ich will in der vorliegenden Arbeit ganz kurz den Gedankengang dieses Beweises angeben und außerdem die Umkehrung dieses Satzes beweisen, die, soviel ich weiß, noch nicht veröffentlicht worden ist. Ich habe soeben erfahren, daß die gleiche Aussage von Herrn Looman in Utrecht gleichzeitig gefunden, aber noch nicht publiziert worden ist; die beiden Beweise sind demnach als gleichzeitig und unabhängig voneinander gewonnene zu betrachten.

2. Es handelt sich also um den Satz:

Der Perronsche und der Denjoysche Integralbegriff sind vollständig äquivalent.

Da bekanntlich eine jede im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion auch im Perronschen Sinne integrierbar ist [4]), kommt es, um die Aussage 2 zu beweisen, nur auf folgendes an:

[3]) Das alles findet man bei Herrn Bauer, a. a. O.

[4]) Diese Tatsache ist sehr einfach z. B. von Herrn de la Vallée Poussin und kürzlich auch von mir in einer Arbeit, die in der Moskauer Math. Sammlung bald erscheinen wird, bewiesen worden.

a) Voraussetzung. $f(x)$ ist in jedem Intervalle $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $a < \alpha < \beta < b$, im Perronschen Sinne integrierbar; es existiert außerdem der Limes

$$J_{a,b} = \lim_{\substack{\alpha \to a \\ \beta \to b}} \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt .$$

Behauptung. $f(x)$ ist im ganzen Intervalle $a \leqq x \leqq b$ im Perronschen Sinne integrierbar, und zwar ist

$$F(x) = \lim_{\alpha \to a} \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt , \qquad F(b) = J_{a,b}$$

das unbestimmte Perronsche Integral.

b) Vorbemerkung. Π sei eine beliebige perfekte, nirgends dichte Menge, α die untere, β die obere Grenze von Π, $a_n < x < b_n$ die zu Π gehörigen komplementären Intervalle; es sei $\chi_n(x)$ eine im Intervalle (a_n, b_n) definierte, im Punkte a_n verschwindende Funktion derart, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(b_n)$ konvergiert; dann bezeichne der Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{r}{}^{x} \chi_n(b_n) + \Theta \chi_k(x)$$

eine Funktion, die für einen der Menge Π angehörigen Punkt x gleich der über alle (a_n, b_n), $b_n \leqq x$, erstreckten Summe der $\chi_n(b_n)$, für einen im Intervalle $a_k < x < b_k$ gelegenen Punkt gleich derselben Summe $+ \chi_k(x)$ ist.

Voraussetzung. 1. $f(x)$ sei in jedem zu der Menge Π komplementären Intervalle (a_n, b_n) im Perronschen Sinne integrierbar;

2. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$, wo

$$\omega_n = \overline{\lim_{a_n \leqq \alpha_n < \beta_n \leqq b_n}} \left| \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(t)\,dt \right|$$

und (α_n, β_n) ein beliebiges der Bedingung $a_n \leqq \alpha_n < \beta_n \leqq b_n$ genügendes Intervall ist, sei konvergent;

3. die Funktion

$$f_0(x) = f(x), \text{ falls } x \text{ der Menge } \Pi \text{ angehört},$$
$$f_0(x) = 0 \qquad \text{sonst}$$

sei im Lebesgueschen Sinne integrierbar: $\int_{a}^{x} f_0(t)\,dt = F_0(x)$.

Behauptung. $f(x)$ ist im ganzen Intervalle $a \leqq x \leqq b$ im Perronschen Sinne integrierbar, und zwar ist das unbestimmte Integral gleich der *stetigen* Funktion

$$F(x) = F_0(x) + \sum_{n=1}^{r}{}^{x} \int_{a_n}^{b_n} f(t)\,dt + \Theta \int_{a_k}^{x} f(t)\,dt ,$$

Wir beweisen nun zunächst die Aussage a).

Es ist natürlich keine wesentliche Einschränkung, wenn wir voraus setzen, $f(x)$ sei in jedem Intervalle $a \leqq x \leqq \beta$, $\beta < b$, im Perronsche Sinne integrierbar, $J_{a.b} = \lim\limits_{\beta \to b} \int\limits_a^\beta f(t)\,dt$. Wir nehmen nun die Punkt $b_0 = a$, $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots \to b$ so, daß die Schwankung der Funktion $F(x$ im Intervalle (b_n, b) $(n \geqq 1)$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2^n}$ sei.

Es sei jetzt $\psi_n(x)$ eine im Intervalle $b_n \leqq x \leqq b_{n+1}$ definierte stetig Funktion, die den Relationen

$$\psi_n(b_n) = 0, \qquad \underline{D}\,\psi_n(x) \geqq f(x), \qquad \underline{D}\,\psi_n(x) \neq -\infty,$$
$$|\psi_n(x) - (F(x) - F(b_n))| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

in allen Punkten x, $b_n \leqq x \leqq b_{n+1}$, genügt, was ja nach unserer Voraus setzung auch immer möglich ist.

Die Funktion

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \psi_m(b_{m+1}) + \psi_n(x), \qquad b_n \leqq x < b_{n+1}$$

ist nun im ganzen Intervalle $a \leqq x < b$ definiert und stetig; sie streb außerdem einem bestimmten Werte C zu, wenn x gegen b strebt, un zwar ist

$$0 \leqq C - F(b) < 3\varepsilon.$$

Wir definieren nun $\bar{\psi}(b) = C$.

Es sei jetzt $\varkappa(x) \geqq 0$ eine im Intervalle (a, b) nicht abnehmende den Wert ε nicht übersteigende stetige Funktion mit $\varkappa(a) = 0$ un $\varkappa'(b) = +\infty$, und $\omega(x)$ gleich der Schwankung von $\bar{\psi}(x)$ im Intervall (x, b). Wir definieren die Funktion

$$\psi(x) = \varkappa(x) + \bar{\psi}(x) \qquad \text{für } a \leqq x \leqq b_1,$$
$$\psi(x) = \varkappa(x) + \bar{\psi}(x) + \omega(b_1) - \omega(x) \qquad \text{für } b_1 \leqq x \leqq b,$$

und es ist dann ganz klar, daß $\psi(x)$ eine etwa 5ε-adjungierte Funktio zu $F(x)$ ist, wie wir sie auch haben wollten.

Man kann auch ganz analog mit $\varphi(x)$ verfahren, und damit wi der Fall a) vollständig erledigt sein, und zwar in ganz elementarer Weis

Wir beweisen jetzt die Aussage b).

Die dazu gehörige Funktion

$$F(x) = F_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{x} f(t)\,dt + \Theta \int_{a_k}^{x} f(t)\,dt$$

ist stetig für alle x, $a \leqq x \leqq b$, und Null in a.

Es genügt, um den Satz b) zu beweisen, eine zu der Funktion $F(x)$ ε-adjungierte Ober- bzw. Unterfunktion zu konstruieren, und zwar wie klein auch die positive Zahl ε gewählt worden sei. Dazu verfahren wir wie folgt.

Es sei N eine so große positive ganze Zahl, daß

$$\sum_{p=1}^{\infty} \omega_{N+p} < \varepsilon$$

ist.

Wir konstruieren in jedem Intervalle $a_n \leqq x \leqq b_n$ eine zu der Funktion $F(x) - F(a_n)$ daselbst $\frac{\varepsilon}{2^n}$-adjungierte Oberfunktion $\psi_n(x)$, $\psi_n(a_n) = 0$. Es sei dann $\Omega_n(x)$ die Schwankung von $\psi_n(x)$ im Intervalle (a_n, x), $x \leqq b_n$. Da ω_n offenbar gleich der Schwankung der Funktion $F(x)$ im Intervalle (a_n, b_n) ist, so ist

$$0 \leqq \Omega_n(b_n) \leqq \omega_n + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

und daher konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n(b_n)$ (und desto mehr die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n(x)$, $a_n \leqq x \leqq b_n$).

Wir wählen außerdem eine zur Funktion $F_0(x)$ auf der ganzen Strecke $a \leqq x \leqq b$ gültige ε-adjungierte Oberfunktion $\psi_0(x)$ und definieren endlich

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \sum_{n=1}^{N} \psi_n(x) + \Theta' \psi_h(x) + \sum_{p=1}^{\infty} \{\Omega_{N+p}(b_{N+p}) + \psi_{N+p}(b_{N+p})\} + \Theta\{\Omega_{N+k}(x) + \psi_{N+k}(x)\},$$

wo Θ' für $h \leqq N$ gerade dieselbe Rolle spielt wie Θ für $k > 0$.

Man überlegt sich sofort durch eine ganz einfache Rechnung, daß $\psi(x)$ eine 5ε-adjungierte Oberfunktion zu $F(x)$ im ganzen Intervalle $a \leqq x \leqq b$ ist.

Auf Grund dieser Ergebnisse und der ursprünglichen Denjoyschen Definition ergibt sich sofort, daß eine jede im Denjoyschen Sinne integrierbare Funktion es auch im Perronschen Sinne ist.

3. Wir beweisen nun ausführlicher den reziproken Satz:

Eine jede im Perronschen Sinne integrierbare Funktion ist auch im Denjoyschen Sinne integrierbar.

Wir stützen uns bei diesem Beweise auf folgendes bekannte, von Lusin und Denjoy[5]) herrührende Resultat:

[5]) Lusin, Integral und trigonometrische Reihe (russisch), sowie Comptes rendus 155 (1912), S. 1475. — Denjoy, Ann. Éc. Norm. Sup. 1916.

Vorbemerkung. Wir sagen, die Variation der stetigen Funktion $F(x$ sei auf der perfekten, nirgends dichten Menge II *wohl*definiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$ für diese Menge II konvergiert (ω_n bedeutet wie üblich die Schwankung der Funktion $F(x)$ im Komplementärintervalle (a_n, b_n)). Wenn dieser Fall ist und α und β die untere bzw. obere Grenze von II sind, sagen wir, daß jene Variation

$$V_{II} F = F(\beta) - F(\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} (F(b_n) - F(a_n))$$

ist.

Dann ist folgendes bewiesen [6]):

Voraussetzung. 1. Die perfekte nirgends dichte Menge P sei irgendwie gegeben im Intervalle $[a, b]$. Es existiert stets ein Stück II dieser Menge [7]), auf dem die im Intervalle $[a, b]$ stetige Funktion $F(x)$ eine wohldefinierte Variation hat.

2. Falls die perfekte Menge II, auf der die Variation von $F(x)$ wohldefiniert ist, das Maß Null hat, ist $V_{II} F = 0$.

Behauptung. 1°. $F(x)$ hat fast in jedem Punkte x, $a \leqq x \leqq b$, eine Ableitung $f(x)$.

2°. $F(x)$ ist das unbestimmte Denjoysche Integral von $f(x)$.

Es bleiben uns also

a) die beiden Tatsachen 1. und 2. für das unbestimmte Perronsche Integral $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ und

b) die Gleichung

$$F'(x) \text{ fast überall } = f(x)$$

zu beweisen.

In dieser Hinsicht erwähnen wir noch den folgenden Denjoyscher Satz [8]):

Wenn in keinem Punkte der perfekten nirgends dichten Menge I $\underline{D}\,\psi(x) = -\infty$ bzw. $D\,\varphi(x) = +\infty$ ist, so gibt es ein Stück II von I, für dessen sämtliche komplementären Intervalle die Ungleichungen

$$\frac{\psi(x) - \psi(a_n)}{x - a_n} > -\lambda_1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\varphi(x) - \varphi(a_n)}{x - a_n} < \lambda_2$$

[6]) Siehe a. a. O. [5]).

[7]) Unter einem Stücke einer Menge P verstehen wir den Inbegriff aller Punkte von P, die der Ungleichung $\alpha \leqq x \leqq \beta$ genügen, wo α, β zwei nicht zu der Menge gehörige Punkte sind. Ein Stück einer perfekten Menge ist gewiß auch selbst perfekt.

[8]) Journ. des Math. 1915. Mémoire sur les nombres dérivés ..., théorème descriptif, Appl. I–VI.

gelten. (x ist ein beliebiger Punkt, $a_n < x \leqq b_n$, und λ_1 und λ_2 positive Konstanten.)

Zufolge der charakteristischen Eigenschaften der adjungierten Funktionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ kann man, wie auch die perfekte nirgends dichte Menge P und die beiden bestimmten adjungierten Ober- und Unterfunktionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ gewählt sein mögen, ein Stück Π und eine positive Konstante λ so finden, daß gleichzeitig für alle zu Π komplementären Intervalle (a_n, b_n) die Ungleichungen

$$\frac{\psi(x)-\psi(a_n)}{x-a_n} > -\lambda, \qquad \frac{\varphi(x)-\varphi(a_n)}{x-a_n} < \lambda, \qquad a_n < x \leqq b_n,$$

bestehen.

Nun wurde schon bemerkt, daß die beiden Funktionen

$$\varrho(x) = F(x) - \varphi(x),$$
$$\sigma(x) = \psi(x) - F(x)$$

im Punkte a Null und außerdem im ganzen Intervalle (a, b) nicht abnehmend, folglich nicht negativ sind.

Man hat also

$$\begin{aligned}) - F(a_n) &= (\psi(x) - \psi(a_n)) - (\sigma(x) - \sigma(a_n)) > -\lambda(x - a_n) - (\sigma(x) - \sigma(a_n)) \\ &\geqq -\lambda(b_n - a_n) - (\sigma(b_n) - \sigma(a_n)), \\ ) - F(a_n) &= (\varphi(x) - \varphi(a_n)) + (\varrho(x) - \varrho(a_n)) < \lambda(x - a_n) + \varrho(x) - \varrho(a_n) \\ &\leqq \lambda(b_n - a_n) + \varrho(b_n) - \varrho(a_n); \end{aligned}$$

wenn wir demnach durch $M = F(\beta_n)$, $m = F(\alpha_n)$ das Maximum bzw. Minimum und durch ω_n die Schwankung von $F(x)$ in (a_n, b_n) bezeichnen, so erkennen wir unmittelbar, daß

$$\begin{aligned} \omega_n = M - m = F(\beta_n) - F(\alpha_n) &\leqq \{F(\beta_n) - F(a_n)\} + \{F(a_n) - F(\alpha_n)\} \\ &\leqq 2\lambda(b_n - a_n) + (\varrho(b_n) - \varrho(a_n)) + (\sigma(b_n) - \sigma(a_n)) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n &\leqq 2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (\varrho(b_n) - \varrho(a_n)) + \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma(b_n) - \sigma(a_n)) \\ &\leqq 2\lambda(b - a) + (\varrho(b) - \varrho(a)) + (\sigma(b) - \sigma(a)) \end{aligned}$$

ist, was offenbar die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$, deren sämtliche Glieder positiv sind, bedeutet.

Die Behauptung 1° ist also bewiesen.

Es sei jetzt, um die Behauptung 2° zu beweisen, Π eine perfekte Menge vom Maße Null, für welche $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$ konvergent und $V_\Pi F \neq 0$ ist. Es genügt, vorauszusetzen, daß $V_\Pi F > 0$ ist. Ich will zeigen, daß in

diesem Falle $F(x)$ nicht das unbestimmte Perronsche Integral der Funktion $f(x)$ im kleinsten die Menge H enthaltenden Intervalle $a \leqq x \leqq b$ sein kann.

Da für jede Oberfunktion $\psi(x)$ die Differenz $\sigma(x) = \psi(x) - F(x)$ nicht abnehmend ist und im Punkte a verschwindet, so genügt es offenbar, ein $\psi(x)$ derart zu konstruieren, daß zwar $\psi(a) = F(a) = 0$, jedoch $\psi(b) > F(b)$ ist. Damit wird nämlich die vorstehende Behauptung bewiesen.

Wir verfahren in dieser Hinsicht folgendermaßen:

Es sei $\varepsilon < \frac{1}{3} V_H F$ und $\psi_n(x)$ eine zu der Funktion $F(x) - F(a_n)$ im Intervalle (a_n, b_n) $\frac{\varepsilon}{2^n}$-adjungierte Oberfunktion.

Wir bezeichnen ferner durch $\Omega_n(x)$ die Schwankung der Funktion $\psi_n(x)$ im Intervalle (a_n, x), $a_n \leqq x \leqq b_n$, $\Omega_n = \Omega_n(b_n)$. Da

$$0 \leqq \Omega_n \leqq \omega_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

ist, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ konvergent. Es existiert also ein N derart, daß $\sum_{p=1}^{\infty} \Omega_{N+p} < \varepsilon$ ist. Da weiter die perfekte Menge H vom Maße 0 ist, kann man leicht in $[a, b]$ eine stetige, im Punkte a verschwindende, nicht abnehmende Funktion konstruieren, welche in b kleiner als ε ist und eine positiv-unendliche Ableitung in allen Punkten der Menge H besitzt[9]). Es sei $\varkappa(x)$ eine solche Funktion. Wir bilden jetzt die Funktion

$$\psi(x) = \varkappa(x) + \sum_{n=1}^{N}{}' \psi_n(b_n) + \Theta \psi_h(x) + \sum_{p=1}^{\infty}{}' \{\Omega_{N+p} + \psi_{N+p}(b_{N+p})\} + \Theta' \{\Omega_{N+k}(x) + \psi_{N+k}(x)\},$$

wo alle Bezeichnungen den üblichen Sinn haben.

Man überzeugt sich sofort, daß $\psi(x)$ eine im ganzen Intervalle $a \leqq x \leqq b$ stetige, im Punkte a verschwindende Funktion ist.

Wir untersuchen jetzt die unteren Derivierten der Funktion $\psi(x)$. Es sei zuerst x ein Punkt, der nicht der Menge H angehört, d. h. für ein gewisses k der Ungleichung $a_k < x < b_k$ genügt. Es ist dann ohne weiteres klar, daß

$$D\psi(x) \geqq D\psi_k(x) \begin{cases} \geqq f(x) \\ \neq -\infty \end{cases}$$

ist.

Es sei jetzt x ein Punkt der Menge H, der nicht mit einem der Punkte a_n, b_n zusammenfällt.

[9]) Eine solche Konstruktion ist z. B. von Bauer a. a. O. angegeben.

Es ergibt sich unmittelbar, daß

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h} = \frac{\varkappa(x+h)-\varkappa(x)}{h} + \frac{1}{h}\sum_{p=1}^{\infty}{}^{x+h}_{x}\{\Omega_{N+p}+\psi(b_{N+p})\}$$
$$+\Theta'\,\frac{\Omega_{N+k}(x+h)+\psi_{N+k}(x+h)}{h}$$

für hinreichend kleine h ist[10]).

Da das erste Glied der Summe (bei hinreichend kleinem h) positiv beliebig groß wird, die anderen Glieder nicht negativ werden, so ergibt sich, daß, falls x ein Punkt von Π ist, die Ableitung $\psi'(x)$ existiert und gleich $+\infty$ ist.

Der Fall $x = a_n$ (bzw. $x = b_n$) läßt sich auf demselben Wege erledigen, indem man zeigt, daß in diesem Falle

$$\underline{D}\,\psi(x) \geqq \underline{D}\,\psi_n(x)$$

ist. $\psi(x)$ ist also eine adjungierte Oberfunktion zu $F(x)$.

Jetzt gelangen wir zu dem erwünschten Widerspruche, indem wir den Wert $\psi(b)$ abschätzen. Wir finden nämlich

$$\psi(b) = \varkappa(b) + \sum_{n=1}^{N}\psi_n(b_n) + \sum_{p=1}^{\infty}(\Omega_{N+p}+\psi_{N+p}(b_{N+p}))$$
$$= \varkappa(b) + \sum_{n=1}^{\infty}(F(b_n)-F(a_n)) + \sum_{n=1}^{\infty}\{\psi(b_n)-(F(b_n)-F(a_n))\} + \sum_{p=1}^{\infty}\Omega_{N+p}$$
$$< \varepsilon + F(b) - V_{\Pi}F + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n} + \varepsilon = F(b) + 3\varepsilon - V_{\Pi}F < F(b),$$

was unmöglich ist, da $\psi(b)$ als Oberfunktion $\geqq F(b)$ sein muß.

Nun bleibt uns nur noch zu zeigen, daß fast überall $F'(x)$ existiert und gleich $f(x)$ ist.

Aus dem erwähnten Lusin-Denjoyschen Satze folgt schon die erste Behauptung. Wir müssen nur noch beweisen, daß fast überall $F'(x) = f(x)$. Es sei vorausgesetzt, es wäre nicht der Fall, d. h. es existiere eine Menge E von positivem Maße, in deren sämtlichen Punkten $F'(x) - f(x) \neq 0$ sei.

Wir bezeichnen durch E_m die (stets meßbare!) Menge, in deren sämtlichen Punkten

$$|F'(x) - f(x)| > \frac{1}{m}$$

ist, und es sei n die kleinste Zahl, für welche die betreffende Menge E_n das Maß $\mu > 0$ besitzt. Wir nehmen jetzt die positive Zahl $\varepsilon < \frac{\mu}{4n}$ und konstruieren die ε-adjungierten Ober- und Unterfunktionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$:

[10]) $\sum_{x}^{x+h}$ bedeutet, daß man nur über diejenigen p zu summieren hat, für die $x \leqq a_{N+p} < b_{N+p} \leqq x+h$ ist (vgl. S. 215, Z. 13–17).

$$\psi(x) = F(x) + \sigma(x),$$
$$F(x) = \varphi(x) + \varrho(x).$$

Man ersieht sofort, daß jede der Mengen A und B, in welchen die fast überall vorhandenen Ableitungen $\varrho'(x)$ und $\sigma'(x)$ größer als $\frac{1}{2n}$ sind, ein Maß $< \frac{1}{2}\mu$ hat [11]) (wenn das nicht der Fall wäre, so hätte man z. B.

$$\varrho(b) \geqq \frac{1}{2n} \cdot \text{Maß von } A \geqq \frac{\mu}{4n} > \varepsilon,$$

was der Voraussetzung widerspricht).

Das Maß der Vereinigungsmenge $A + B$ ist folglich kleiner als μ, und die Menge E enthält daher eine Teilmenge C von positivem Maße, in deren sämtlichen Punkten die Ableitungen der beiden Funktionen $\varrho(x)$ und $\sigma(x)$ existieren und zwischen 0 und $\frac{1}{2n}$ liegen.

Es sei jetzt ξ ein beliebiger Punkt der Menge C. Wir haben einerseits

$$\psi'(\xi) = F'(\xi) + \sigma'(\xi) \leqq F'(\xi) + \frac{1}{2n},$$
$$F'(\xi) \geqq \psi'(\xi) - \frac{1}{2n},$$

und da $\psi'(\xi) \geqq f(\xi)$ ist,

$$F'(\xi) \geqq f(\xi) - \frac{1}{2n}.$$

Anderseits ist

$$F'(\xi) = \varphi'(\xi) + \varrho'(\xi) \leqq \varphi'(\xi) + \frac{1}{2n} \leqq f(\xi) + \frac{1}{2n};$$

also, da

$$f(\xi) - \frac{1}{2n} \leqq F'(\xi) \leqq f(\xi) + \frac{1}{2n}$$

ist, ist

$$|F'(\xi) - f(\xi)| < \frac{1}{n},$$

was im Widerspruche mit der Definition der den Punkt ξ enthaltenden Menge E ist.

Damit ist der Beweis der Äquivalenz der Perronschen und der Denjoyschen Integraldefinition vollständig erbracht.

Göttingen, den 14. Juni 1923.

[11]) A. Denjoy, Journ. de Math. 1915.

(Eingegangen am 31. Juli 1923.)

Bilineare Transformation quaternärer quadratischer Formen.

Von

H. Brandt in Aachen.

1. In einer kleinen in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit „Bilineare Transformation quadratischer Formen“[1]) habe ich eine interessante Eigenschaft der bilinearen Substitutionen angegeben, die eine quadratische Form in das Produkt zweier solchen Formen transformieren. Dabei sind die Formen nicht singulär und von gleicher Variablenzahl vorausgesetzt (wobei aber nur die Fälle $n = 2$, 4 oder 8 in Betracht kommen). Ist eine solche bilineare Substitution vorgelegt, so lassen sich daraus durch rationale Operationen elf weitere herleiten, die mit der ersten ein System bilden, das durch schöne Symmetrieeigenschaften ausgezeichnet ist und wegen seiner Beziehungen zur Tetraedergruppe als tetraedrales System[2]) bezeichnet wurde. Die folgenden Zeilen bringen für die quaternären Formen eine Ergänzung zu den früheren Betrachtungen, wodurch die algebraische Grundlage zu einigen Sätzen aus der Kompositionstheorie dieser Formen gewonnen wird.

2. Wir knüpfen dabei unmittelbar an die frühere Arbeit an, deren Bezeichnungen und Definitionen wir als bekannt voraussetzen. Die Koeffizienten der Formen und Substitutionen sind zunächst beliebige komplexe Zahlen. Es seien also $A((x))$, $B((y))$ und $C((z))$ irgend drei quaternäre quadratische Formen mit der gleichen[3]) nicht verschwindenden Determinante D, und die kurz durch P bezeichnete bilineare Substitution

$$(\mathrm{I}) \qquad x_i = \sum_{jk} p_{ijk}\, y_j z_k \quad [4])$$

[1]) Math. Zeitschrift **17** (1923), S. 153.

[2]) § 7. (Die §§ beziehen sich in den Fußnoten immer auf die eben genannte Arbeit.)

[3]) § 1 nebst Fußnote [2]).

[4]) Die Summationen erstrecken sich hier wie im folgenden immer über die Indexwerte 0, 1, 2, 3.

sei eine solche, welche die Gleichung

$$(II) \qquad A((x)) = B((y))\,C((z))$$

zur Identität macht. Wir bezeichnen durch d einen bestimmten der beiden Werte $\sqrt{D}$, bilden die durch d dividierten Adjungierten der Formen A, B, C, d. h. die reziproken[5]) Formen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und darnach das tetraedrale System[2]) koordinierter und transponierter bilinearer Substitutionen P, P', P''; Q, Q', Q''; R, R', R''; S, S', S'', was durch P, die Formen A, B, C und den Wurzelwert $\sqrt{D} = d$ eindeutig bestimmt ist[6]).

Für die Determinanten der Linearformsysteme dieser bilinearen Substitutionen bestehen dann die Gleichungen[7])

$$(III) \quad \begin{array}{llll} |\pi(\xi)| = \varepsilon_1[\mathfrak{A}((\xi))]^2, & \mathfrak{p}(y) = \varepsilon_2[B((y))]^2, & p(z) = \varepsilon_3[C((z))]^2 \\ |\varkappa(\xi)| = \varepsilon_1[\mathfrak{A}((\xi))]^2, & \mathfrak{q}(\eta) = \varepsilon_2[\mathfrak{B}((\eta))]^2, & q(\zeta) = \varepsilon_3[\mathfrak{C}((\zeta))]^2 \\ |\varrho(x)| = \varepsilon_1[A((x))]^2, & |\mathfrak{r}(y)| = \varepsilon_2[B((y))]^2, & r(\zeta) = \varepsilon_3[\mathfrak{C}((\zeta))]^2 \\ |\sigma(x)| = \varepsilon_1[A((x))]^2, & |\mathfrak{s}(\eta)| = \varepsilon_2[\mathfrak{B}((\eta))]^2, & s(z) = \varepsilon_3[C((z))]^2 \end{array}$$

Die Vorzeichen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, zwischen denen die Bedingung $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1$ besteht, bestimmen die Signatur der bilinearen Substitutionen, wobei immer die in gleicher Weise akzentuierten die gleiche Signatur haben[8]).

Es ist nun sehr bemerkenswert, daß für die einzelnen bilinearen Substitutionen noch ein anderes Vorzeichen charakteristisch ist, was nicht so auf der Hand liegt. Es zeigt sich erst, wenn man die Halbdeterminanten (Pfaffschen Aggregate) gewisser alternierender Matrizen bildet und ist für alle bilinearen Substitutionen des tetraedralen Systems vollständig bestimmt, sobald es für eine Substitution ermittelt ist.

Transformiert man die Variablenreihen x_i, y_i, z_i durch lineare Substitutionen, deren Determinanten entweder alle drei den Wert $+1$ oder alle drei den Wert -1 haben und die Variablenreihen ξ_i, η_i, ζ_i entsprechend durch die adjungierten Substitutionen, so bleiben in beiden Fällen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ungeändert, diese neuen Vorzeichen aber nur im ersten Falle, während sie im zweiten jedesmal in die entgegengesetzten Werte übergehen. Deshalb kann man die tetraedralen Systeme und ihre bilinearen Substitutionen auch bei gleicher Signatur noch in zwei verschiedene *Arten* einteilen.

---

[5]) § 1.

[6]) Durch P sind die Formen A, B, C bereits bis auf Faktoren, die 4. Einheitswurzeln sind, bestimmt.

[7]) § 2 und 8.

[8]) § 9 und 10.

3. Um die Richtigkeit dieser Behauptungen zu erkennen, knüpfen wir an die schon früher[9]) benutzten Auflösungen der Gleichungen (I) nach den y_i oder z_i an

$$(IV) \qquad C((z))\,y_i = \sum_{jk} s_{kij} z_j x_k, \qquad B((y))\,z_i = \sum_{jk} r_{jki} x_j y_k$$

und führen diese Ausdrücke in die aus (I) folgende Beziehung

$$\sum_i x_i \xi_i = \sum_{ijk} p_{ijk} \xi_i y_j z_k$$

ein, wo die ξ_i beliebige Variable bedeuten. Dadurch entstehen die beiden Formeln

$$(V) \qquad \begin{aligned} \sum_i \sum_{\alpha\beta} \sum_{\gamma\delta} p_{\alpha\gamma i} r_{\beta\delta i} \xi_\alpha x_\beta y_\gamma y_\delta &= B((y)) \sum_i x_i \xi_i, \\ \sum_i \sum_{\alpha\beta} \sum_{\gamma\delta} p_{\alpha i\gamma} s_{\beta i\delta} \xi_\alpha x_\beta z_\gamma z_\delta &= C((z)) \sum_i x_i \xi_i. \end{aligned}$$

Diese Formeln wollen wir der besseren Übersicht wegen in Matrizen schreiben. Dabei bezeichnen wir durch a, b, c; $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ die Matrizen der Formen A, B, C; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und setzen zur Abkürzung

$$\Xi = \sum_i x_i \xi_i, \qquad H = \sum_i y_i \eta_i, \qquad Z = \sum_i z_i \zeta_i.$$

Die Gleichungen (V) können dann in der Form

$$(V') \qquad \varrho(x)\dot{\pi}(\xi) + \pi(\xi)\dot{\varrho}(x) = 2\,\Xi \cdot b, \qquad \dot{\sigma}(x)\pi(\xi) + \dot{\pi}(\xi)\sigma(x) = 2\,\Xi \cdot c$$

geschrieben werden, wo der Punkt die transponierte Matrix bezeichnet.

Wegen der Symmetrieeigenschaften des tetraedralen Systems bestehen nun noch eine ganze Reihe ähnlicher Beziehungen, so daß sich folgendes System von Matrizengleichungen ergibt:

$$(VI) \qquad \begin{aligned} &\varrho(x)\dot{\pi}(\xi) + \pi(\xi)\dot{\varrho}(x) = 2\,\Xi \cdot b, \quad \dot{\sigma}(x)\pi(\xi) + \dot{\pi}(\xi)\sigma(x) = 2\,\Xi \cdot c, \\ &\mathfrak{p}(y)\dot{\mathfrak{s}}(\eta) + \mathfrak{s}(\eta)\dot{\mathfrak{p}}(y) = 2H \cdot c, \quad \dot{\mathfrak{r}}(y)\mathfrak{s}(\eta) + \dot{\mathfrak{s}}(\eta)\mathfrak{r}(y) = 2H \cdot a, \\ &s(z)\dot{r}(\zeta) + r(\zeta)\dot{s}(z) = 2\,Z \cdot a, \quad p(z)r(\zeta) + \dot{r}(\zeta)p(z) = 2Z \cdot b, \\ &\sigma(x)\dot{\varkappa}(\xi) + \varkappa(\xi)\dot{\sigma}(x) = 2\,\Xi \cdot \mathfrak{b}, \quad \dot{\varrho}(x)\varkappa(\xi) + \dot{\varkappa}(\xi)\varrho(x) = 2\,\Xi \cdot \mathfrak{c}, \\ &\mathfrak{r}(y)\dot{\mathfrak{q}}(\eta) + \mathfrak{q}(\eta)\dot{\mathfrak{r}}(y) = 2H \cdot \mathfrak{c}, \quad \dot{\mathfrak{p}}(y)\mathfrak{q}(\eta) + \dot{\mathfrak{q}}(\eta)\mathfrak{p}(y) = 2H \cdot \mathfrak{a}, \\ &p(z)\dot{q}(\zeta) + q(\zeta)\dot{p}(z) = 2Z \cdot \mathfrak{a}, \quad \dot{s}(z)q(\zeta) + \dot{q}(\zeta)s(z) = 2Z \cdot \mathfrak{b}. \end{aligned}$$

Benutzt man die Darstellung des tetraedralen Systems durch ein Tetraeder[2]), so lassen sich diese Formeln, da die zwei ersten bewiesen sind, ohne weitere Rechnung von den Kanten des Tetraeders ablesen.

4. Bedeutet t eine alternierende Matrix, d. h. eine solche, für welche $t + \dot{t} = 0$ ist, so führen wir für die Halbdeterminante von t die Bezeichnung ein

$$t_{01}t_{23} + t_{02}t_{31} + t_{03}t_{12} = \{t\}.$$

[9]) § 3 Formel (IV).

Wir wollen dann die Werte der Halbdeterminanten der aus den Formeln (VI) gebildeten alternierenden Matrizen $\varrho(x)\dot{\pi}(\xi) - \Xi\cdot b$, $\dot{\sigma}(x)\pi(\xi) - \Xi\cdot c$ usw. bestimmen.

Dafür werden sich folgende Ausdrücke ergeben

$$\text{(VII)}\quad \begin{aligned}
\{\varrho(x)\dot{\pi}(\xi) - \Xi\cdot b\} &= \{\sigma(x)\dot{\varkappa}(\xi) - \Xi\cdot \mathfrak{b}\} = \quad \varepsilon\varepsilon_2 [A((x))\,\mathfrak{A}((\xi)) - d\cdot\Xi^2\\
\{\mathfrak{p}(y)\dot{\mathfrak{s}}(\eta) - H\cdot c\} &= \{\mathfrak{r}(y)\dot{\mathfrak{q}}(\eta) - H\cdot \mathfrak{c}\} = \quad \varepsilon\varepsilon_3 [B((y))\,\mathfrak{B}((\eta)) - d\cdot H^2\\
\{s(z)\dot{\mathfrak{r}}(\zeta) - Z\cdot a\} &= \{p(z)\dot{\mathfrak{q}}(\zeta) - Z\cdot \mathfrak{a}\} = \quad \varepsilon\varepsilon_1 [C((z))\,\mathfrak{C}((\zeta)) - d\cdot Z^2\\
\{\dot{\sigma}(x)\pi(\xi) - \Xi\cdot c\} &= \{\dot{\varrho}(x)\varkappa(\xi) - \Xi\cdot \mathfrak{c}\} = -\varepsilon\varepsilon_3 [A((x))\,\mathfrak{A}((\xi)) - d\cdot\Xi^2\\
\{\dot{\mathfrak{r}}(y)\mathfrak{s}(\eta) - H\cdot a\} &= \{\dot{\mathfrak{p}}(y)\mathfrak{q}(\eta) - H\cdot \mathfrak{a}\} = -\varepsilon\varepsilon_1 [B((y))\,\mathfrak{B}((\eta)) - d\cdot H^2\\
\{\dot{p}(z)r(\zeta) - Z\cdot b\} &= \{\dot{s}(z)q(\zeta) - Z\cdot \mathfrak{b}\} = -\varepsilon\varepsilon_2 [C((z))\,\mathfrak{C}((\zeta)) - d\cdot Z^2
\end{aligned}$$

Dies Formelsystem ließe sich noch verdoppeln, wenn man überall auch die transponierten Matrizen einsetzen würde. Der Unterschied der drei ersten Doppelgleichungen gegen die drei letzten zeigt sich beim Tetraeder durch den verschiedenen Umlaufsinn, der durch die Reihenfolge der Symbole in den linken Seiten bestimmt wird.

5. Wir beweisen die Richtigkeit dieses Gleichungssystems zuerst in einem speziellen Falle. Wir wählen nämlich für P die Substitution

$$\text{(VIII)}\quad \begin{aligned}
x_0 &= -y_0z_0 + y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3,\\
x_1 &= \quad y_0z_1 + y_1z_0 + y_2z_3 - y_3z_2,\\
x_2 &= \quad y_0z_2 + y_2z_0 + y_3z_1 - y_1z_3,\\
x_3 &= \quad y_0z_3 + y_3z_0 + y_1z_2 - y_2z_1,
\end{aligned}$$

welche die Gleichung

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)(z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$$

identisch befriedigt. Nimmt man $d = +1$ an, so werden alle bilinearen Substitutionen des tetraedralen Systems, also auch alle ihre Linearformsysteme (bis auf die Bezeichnung der Variablen) miteinander identisch[10]). Dabei ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$, und es wird

$$\pi(x) = \left\| \begin{matrix} -x_0 & x_1 & x_2 & x_3\\ x_1 & x_0 & x_3 & -x_2\\ x_2 & -x_3 & x_0 & x_1\\ x_3 & x_2 & -x_1 & x_0 \end{matrix} \right\|.$$

Eine einfache Rechnung ergibt dann, wenn e die Einheitsmatrix, d. h. die Matrix der Form $E((x)) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ bezeichnet,

$$\{\pi(x)\dot{\pi}(\xi) - \Xi\cdot e\} = +[(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) - \Xi^2],$$
$$\{\dot{\pi}(x)\pi(\xi) - \Xi\cdot e\} = -[(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) - \Xi^2];$$

[10]) § 11.

demnach ist in diesem speziellen Falle das Gleichungssystem (VII) richtig und ε erhält den Wert $\varepsilon = -1$.

6. Die Richtigkeit wird aber sogleich allgemein erwiesen sein, sobald noch gezeigt werden kann, daß das Gleichungssystem invariant ist gegenüber linearen Transformationen mit gleichen Determinantenquadraten. Durch solche Transformationen läßt sich nämlich ein tetraedrales System in ein beliebiges andere überführen.

Ist nämlich das erste durch die Substitution P, die Formen A, B und C und den Wurzelwert $\sqrt{D} = d$ bestimmt, wo D den für die drei Formen gleichen nicht verschwindenden Determinantenwert bezeichnet, das zweite aber entsprechend durch

$$\bar{P}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \quad \sqrt{\bar{D}} = \bar{d}, \text{ wo ebenfalls } \bar{D} \neq 0,$$

so kann man zunächst für die Variablenreihen x_i, y_i, z_i drei lineare Substitutionen t, u, v so bestimmen, daß dadurch die Formen A, B, C entsprechend in $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ und die Substitution P gleichzeitig in $\bar{P}$ transformiert wird[11]). Bezeichnet man dann einen der beiden Werte $\sqrt{\frac{\bar{d}}{d}}$ durch δ, so ist offenbar bis auf das Vorzeichen der Wert der Determinanten der Substitutionen t, u, v gleich δ^2, so daß

$$|t| = \iota_1 \delta^2, \qquad |u| = \iota_2 \delta^2, \qquad |v| = \iota_3 \delta^2$$

geschrieben werden kann, wo $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ positive oder negative Einheiten bedeuten. Definiert man jetzt drei Substitutionen $\mathfrak{t}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ durch die Matrizengleichungen

$$t\,\mathfrak{t} = u\,\mathfrak{u} = v\,\mathfrak{v} = \delta$$

und transformiert die Variablenreihen ξ_i, η_i, ζ_i durch $\mathfrak{t}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$, so gehen die Formen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ bzw. in $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}, \bar{\mathfrak{C}}$ und somit auch sämtliche bilinearen Substitutionen des alten tetraedralen Systems in die des neuen über[12]). Für die Linearformsysteme des neuen tetraedralen Systems erhält man dann

$$\text{(IX)} \quad \begin{aligned}
&\bar{\pi}(\bar{\xi}) = \mathfrak{u}^{-1}\pi(\xi)v, && \bar{\mathfrak{p}}(\bar{y}) = \mathfrak{v}^{-1}\mathfrak{p}(y)\mathfrak{t}, && \bar{p}(\bar{z}) = t^{-1}p(z)u,\\
&\bar{\varkappa}(\bar{\xi}) = u^{-1}\varkappa(\xi)\mathfrak{v}, && \bar{\mathfrak{q}}(\bar{\eta}) = v^{-1}\mathfrak{q}(\eta)\mathfrak{t}, && \bar{q}(\bar{\zeta}) = t^{-1}q(\zeta)\mathfrak{u},\\
&\bar{\varrho}(\bar{x}) = \mathfrak{u}^{-1}\varrho(x)\mathfrak{v}, && \bar{\mathfrak{r}}(\bar{y}) = v^{-1}\mathfrak{r}(y)t, && \bar{r}(\bar{\zeta}) = \mathfrak{t}^{-1}r(\zeta)u,\\
&\bar{\sigma}(\bar{x}) = u^{-1}\sigma(x)v, && \bar{\mathfrak{s}}(\bar{\eta}) = \mathfrak{v}^{-1}\mathfrak{s}(\eta)t, && \bar{s}(\bar{z}) = \mathfrak{t}^{-1}s(z)\mathfrak{u},
\end{aligned}$$

wobei noch die Variablenreihen x_i, y_i, z_i; ξ_i, η_i, ζ_i der Reihe nach durch die Substitutionen t, u, v; $\mathfrak{t}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ zu transformieren sind.

[11]) H. Brandt, Über ein Problem von A. Hurwitz, quaternäre quadratische Formen betreffend. Math. Ann. 88 (1923), S. 211.

[12]) Vgl. hierzu § 8.

7. Aus diesen Formeln entnimmt man zunächst die Beziehungen

$$\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 \iota_2 \iota_3, \qquad \bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 \iota_3 \iota_1, \qquad \bar{\varepsilon}_3 = \varepsilon_3 \iota_1 \iota_2,$$

wobei $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3$ für das neue tetraedrale System dieselbe Bedeutung haben, wie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ für das alte.

Führt man in den Formeln (VII) die transformierten Größen ein, so multiplizieren sich die Halbdeterminanten lediglich mit gewissen Einheiten, nämlich den sechs Doppelgleichungen entsprechend mit $\iota_2, \iota_3, \iota_1$; $\iota_3, \iota_1, \iota_2$. Demnach bestehen für das neue tetraedrale System wieder ganz entsprechende Gleichungen, wenn noch

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \iota_1 \iota_2 \iota_3$$

gesetzt wird.

Es wird nämlich

$$\{\bar{\varrho}(\bar{x})\dot{\bar{\pi}}(\bar{\xi}) - \bar{\Xi}\cdot\bar{b}\} = \{\mathfrak{u}^{-1}\varrho(x)\mathfrak{v}\dot{v}\dot{\pi}(\xi)\dot{\mathfrak{u}}^{-1} - \frac{\Xi}{\delta}\dot{u}bu\}$$

$$= \left\{\frac{1}{\delta}\left[\dot{u}\left(\varrho(x)\dot{\pi}'(\xi) - \Xi b\right)u\right]\right\} = \iota_2\{\varrho(x)\dot{\pi}(\xi) - \Xi b\} \quad \text{usw.}$$

Daraus ergibt sich zunächst die allgemeine Richtigkeit der Gleichungen (VII).

Ferner erkennt man, daß der Wert von ε derselbe bleibt oder sich ändert, je nachdem die Anzahl der Minuszeichen unter den Einheiten $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ gerade oder ungerade ist.

ε ändert sich auch, wenn man in der Identität (II) die Formen B und C miteinander vertauscht. In der Tat vertauschen sich dadurch die beiden Gleichungen (V) und somit auch die beiden Gruppen von Gleichungen, in die das System (VII) zerfällt, wobei ε durch $-\varepsilon$ ersetzt wird. Endlich ist ε von dem Werte von d abhängig; wenn d durch $-d$ ersetzt wird, geht auch ε in $-\varepsilon$ über.

8. Von besonderer Bedeutung sind die vorstehenden Betrachtungen für den Fall, daß die Koeffizienten der Formen und Substitutionen reell sind, was von nun an vorausgesetzt wird. Die Formen sind dann entweder definit, wobei sie ohne große Einschränkung als positiv angenommen werden können, oder sie haben den Trägheitsindex 2.[13]) Wir wollen nun den Wert von $VD = d$ ein für allemal festsetzen, nämlich positiv für die definiten und negativ für die indefiniten Formen. Dann ist der Wert von ε, der in den Gleichungen (VII) auftritt, nicht mehr von unserer Willkür abhängig, sondern von vornherein durch die bilineare Substitution P gegeben. P bestimmt zwar die Formen A, B, C nur bis auf das Vorzeichen. Da aber eine Vorzeichenänderung von A auch eine solche von $\mathfrak{A}$ bewirkt,

[13]) H. Brandt, Zur Komposition der quaternären quadratischen Formen. Journal für r. u. a. Math. **143** (1913), S. 118.

bleibt der Wert von ε in den Formeln (VII) davon unberührt. Je nachdem ob ε positiv oder negativ ist, wollen wir von *positiver* oder *negativer Art* sprechen.

Bei der Darstellung des tetraedralen Systems durch ein Tetraeder kann man die Art durch den Umlaufsinn des Tetraeders zur Darstellung bringen. Ist nämlich festgesetzt, welcher Umlaufsinn positiv und welcher negativ sein soll, so braucht man nur die sechs Formen A, B, C; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ den Kanten des Tetraeders so zuzuordnen, daß die Reihenfolge der drei Formen aus einer der 12 früher aufgestellten Identitäten[14]) den Umlaufsinn bestimmt, den die Art fordert, wobei Entsprechendes dann für die übrigen 11 Identitäten von selbst richtig ist.

9. Wir nehmen jetzt an, die bilineare Substitution (I) für die Identität (II) habe negative Signatur und negative Art, dann haben alle bilinearen Substitutionen des tetraedralen Systems $P, P', \ldots, S''$ negative Signatur und negative Art. Daneben betrachten wir die bilinearen Substitutionen, die aus diesen hervorgehen, dadurch, daß jedesmal die zweite und dritte Variablenreihe vertauscht wird. (Dabei nennen wir z. B. für die Substitution (I) die x_i die erste, die y_i die zweite und die z_i die dritte Variablenreihe). Die dadurch entstehenden 12 bilinearen Substitutionen, die wir durch $\hat{P}, \hat{P}', \ldots, \hat{S}''$ bezeichnen wollen, bilden ebenfalls ein tetraedrales System und sind sämtlich von negativer Signatur und positiver Art.

Jetzt wollen wir in den 12 ersten bilinearen Substitutionen jedesmal die erste Variablenreihe durch eine lineare Substitution der Determinante -1 transformieren, etwa dadurch, daß wir immer die erste Variable mit -1 multiplizieren, die andern aber ungeändert lassen. Ebenso wollen wir in den 12 letzten bilinearen Substitutionen jedesmal die zweite und dritte Variablenreihe in derselben Weise transformieren. Die dadurch entstehenden 24 bilinearen Substitutionen, die durch $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \ldots, \mathfrak{S}''$; $\hat{\mathfrak{P}}, \hat{\mathfrak{P}}', \ldots, \hat{\mathfrak{S}}''$ bezeichnet werden mögen und nun keine tetraedralen Systeme mehr bilden, sind dann sämtlich von positiver Signatur und positiver Art. Sie vermitteln die folgenden Identitäten, in denen der Akzent die durch die genannten Transformationen aus den früheren entstandenen Formen bezeichnet:

$$
\begin{array}{llll}
\mathfrak{P} : A' = BC, & \mathfrak{Q} : A' = \mathfrak{B}\mathfrak{C}, & \mathfrak{R} : \mathfrak{A}' = B\mathfrak{C}, & \mathfrak{S} : \mathfrak{A}' = \mathfrak{B}C, \\
\mathfrak{S}' : B' = CA, & \mathfrak{Q}' : B' = \mathfrak{C}\mathfrak{A}, & \mathfrak{P}' : \mathfrak{B}' = C\mathfrak{A}, & \mathfrak{R}' : \mathfrak{B}' = \mathfrak{C}A, \\
\mathfrak{R}'' : C' = AB, & \mathfrak{Q}'' : C' = \mathfrak{A}\mathfrak{B}, & \mathfrak{S}'' : \mathfrak{C}' = A\mathfrak{B}, & \mathfrak{P}'' : \mathfrak{C}' = \mathfrak{A}B, \\
\hat{\mathfrak{P}} : A = C'B', & \hat{\mathfrak{Q}} : A = \mathfrak{C}'\mathfrak{B}', & \hat{\mathfrak{R}} : \mathfrak{A} = \mathfrak{C}'B', & \hat{\mathfrak{S}} : \mathfrak{A} = C'\mathfrak{B}', \\
\hat{\mathfrak{S}}' : B = A'C', & \hat{\mathfrak{Q}}' : B = \mathfrak{A}'\mathfrak{C}', & \hat{\mathfrak{P}}' : \mathfrak{B} = \mathfrak{A}'C', & \hat{\mathfrak{R}}' : \mathfrak{B} = A'\mathfrak{C}', \\
\hat{\mathfrak{R}}'' : C = B'A', & \hat{\mathfrak{Q}}'' : C = \mathfrak{B}'\mathfrak{A}', & \hat{\mathfrak{S}}'' : \mathfrak{C} = \mathfrak{B}'A', & \hat{\mathfrak{P}}'' : \mathfrak{C} = B'\mathfrak{A}'.
\end{array}
\tag{X}
$$

[14]) § 5.

10. Wenn die Koeffizienten von P, also auch die von A, B, C; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ rational sind, haben Q, R, S, wie aus der Definition dieser bilinearen Substitutionen folgt[15]), also auch alle 24 bilinearen Substitutionen des Formelsystems (X) rationale Koeffizienten. Rationale Substitutionen P können aus dem Beispiel von § 5 hergestellt werden, indem alle drei Variablenreihen der bilinearen Substitution (VIII) rationalen Transformationen mit gleichen Determinantenquadraten unterworfen werden.

Wenn die Koeffizienten von P ganze rationale Zahlen und die Formen A, B, C ganzzahlig und primitiv sind, so werden auch R, S und die 18 aus P, R, S abgeleiteten bilinearen Substitutionen des Systems (X) ganzzahlig. Dabei folgt aus der Ganzzahligkeit von P, R, S auch die der Formen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$.

Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ nicht nur ganzzahlig sondern auch primitiv, so kann ebenso auf die Ganzzahligkeit von Q und der sechs aus Q abgeleiteten Substitutionen des Systems (X) geschlossen werden.

Ein solcher wenn auch trivialer Fall liegt vor bei dem Beispiel in § 5. Daß es aber für jeden ganzzahligen Wert von d Beispiele gibt, wobei sogar bei den größeren Werten von d die zwölf Formen alle verschiedenen[16]) Formenklassen angehören können, das nachzuweisen würde über den Gegenstand dieser kleinen Arbeit weit hinausgehen.

---

[15]) § 3.

[16]) Wenigstens für $d > 0$.

(Eingegangen am 1. September 1923.)

Betrachtungen zur Begründung der Mathematik.

Von

M. Pasch in Gießen.

I. Allgemeiner Teil.

1. Als ich vor fünfzig Jahren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie in Angriff nahm[1]), konnte ich das Neue nicht in dem leitenden Gedanken erblicken, der ja den Mathematikern von jeher vorgeschwebt hat, sondern in dem Bestreben, diesen Gedanken über das bis dahin erreichte Maß hinaus und so vollkommen, wie es in meinen Kräften stand, zu verwirklichen. Es galt also, die Lücken in dem überlieferten Lehrgebäude der Geometrie zu ergründen, über die von der Geometrie verarbeiteten Vorstellungen und Erkenntnisse, besonders die unscheinbaren und versteckten, eine vollständige Übersicht zu gewinnen und schließlich daraus die geeignet scheinenden als „Kernbegriffe" und „Kernsätze"[2]) zu einem „Kern" zu vereinigen, aus dem *alles*, was zur Geometrie gehört, herauswächst.

2. In der Geometrie werden auch die zur Arithmetik gehörigen Begriffe gebraucht. Wenn ich nicht wagen konnte, eine Untersuchung dieser Begriffe mit der über Geometrie zu verbinden, so schien mir die auf Geometrie beschränkte Untersuchung immer noch eine wünschenswerte Arbeit. Wenn ich sodann innerhalb der Geometrie die krummen Gebilde ganz außer Betracht ließ, so wird diese Einschränkung auch durch neuere Versuche gerechtfertigt; siehe: Die Begriffswelt des Mathematikers in der Vorhalle der Geometrie (Leipzig, Felix Meiner, 1922). Schließlich schien, um bei mäßigem Umfang Abgerundetes zu geben, eine weitere Einschränkung ratsam: die auf projektive Geometrie.

Hinsichtlich der beiden ersten Punkte hat sich für die Behandlung der Geometrie kaum Wesentliches geändert. Im übrigen dagegen ist die

[1]) Vorwort zu den „Vorlesungen über neuere Geometrie", 1882.

[2]) In dem Buche heißt es noch: Grundbegriffe und Grundsätze.

Forschung weit über jene Grenzen hinausgegangen, vor allem unter dem tiefgehenden Einfluß von Hilberts „Grundlagen der Geometrie“. Wenn nun hierbei gewisse Forderungen, die mir als wesentlich gegolten hatten, mehr oder weniger zurückgestellt wurden, so habe ich doch meine Stellungnahme nicht ändern können. Diese Forderungen betreffen *erstens* die Gesichtspunkte, wonach Kernbegriffe und Kernsätze ausgewählt werden; *zweitens* die formale Seite deduktiven Vorgehens überhaupt, über die ich mich an verschiedenen Stellen eingehend geäußert habe. Beides nicht bloß in der Geometrie, sondern in der gesamten Mathematik.

3. Zur Erläuterung des ersten der eben bezeichneten Gegenstände liegen mir als Beispiel am nächsten die Begriffe der geraden Strecke und der geraden Linie. Erst spät hat die Benennung „gerade Linie“ die heutige Bedeutung erhalten und zur Unterscheidung sich die „gerade Strecke“ eingebürgert; die Geometrie hat lange bestanden, ohne unsere gerade „Linie“ zu kennen. Danach erscheint es als natürlich, die gerade Strecke unter die Kernbegriffe aufzunehmen. Ich darf hier auf die Unterscheidung zwischen „Kernbegriffen“ und „Stammbegriffen“, sowie zwischen „Kernsätzen“ und „Stammsätzen“, verweisen, die ich in den Vorlesungen über neuere Geometrie für den Fall der projektiven Geometrie getroffen und auch später erörtert habe. Die projektive Geometrie entspringt aus einem „Stamm“, der auf dem Boden der Geometrie vor der Abspaltung ihres projektiven Teiles gewonnen ist, durch Deduktion aus dem Kern der Geometrie. Schon der Punkt der projektiven Geometrie, der an der Spitze ihrer Stammbegriffe steht, ist ein „abgeleiteter“ Begriff, da er auch die uneigentlichen (idealen) Punkte umfaßt. Der nächste projektive Stammbegriff ist der ebenfalls durch Deduktion, unter Einführung uneigentlicher Elemente gewonnene Begriff der projektiven Geraden. Ein Zwischenglied wie Strecke tritt hier nicht auf.

4. Der Übergang von der geraden Strecke zur geraden Linie bedurfte der Rechtfertigung durch eine Deduktion und eine Definition, noch bevor man mit uneigentlichen Punkten arbeitete. In der Entwickelung der Geometrie spielt demnach die gerade Strecke die Rolle eines Kernbegriffs, die gerade Linie die eines abgeleiteten Begriffs. Nun ist vom bloß logischen Standpunkte aus jedes Lehrgebäude berechtigt, dessen Stamm innere Folgerichtigkeit besitzt und den darzustellenden Stoff vollständig zu liefern vermag, auch wenn der Stamm Begriffe und Sätze enthält, deren Aufnahme in einen Kern beanstandet würde. Dies gilt also auch für ein Lehrgebäude der (gesamten) Geometrie, in dem die gerade Linie zum Stammbegriff gemacht und die gerade Strecke erst aus dem Stamm abgeleitet wird. Ich möchte den besonders gearteten Stamm der Geometrie, den ich „Kern“ nenne, als einen „natürlichen“ Stamm be-

zeichnen und demgemäß *natürliche Grundlagen der Geometrie* anderen gegenüberstellen, ohne behaupten zu wollen, daß natürliche nur auf eine Art hergestellt werden können, und ohne die Fruchtbarkeit zu verkennen, die anderen Arten der Grundlegung für die Geometrie oder die Mathematik überhaupt innewohnt.

5. Von den beiden am Ende der Nr. 2 als maßgebend bezeichneten Forderungen habe ich die erste zunächst nur an der Geometrie erläutert. Für die Arithmetik lege ich der zweiten, die ich eine formale nannte, die größere Bedeutung bei. Sie besteht darin, daß das überlieferte Lehrgebäude der Arithmetik vor allem zu einem in sich vollständigen erhoben werden muß, durch Ermittlung aller derjenigen Vorstellungen und Erkenntnisse, die von Anfang an gebraucht und dennoch nicht ausdrücklich unter den Voraussetzungen aufgeführt oder überhaupt nicht ausgesprochen werden.

Das Festhalten dieser Forderung in der Arithmetik führt zugleich von selbst zu einem „Kern", also zu einer „natürlichen" Begründung. Eine solche habe ich nach größeren Vorarbeiten in der im Jahre 1916 abgeschlossenen Abhandlung „Der Ursprung des Zahlbegriffs" [Teil I: Archiv der Mathematik und Physik **28** (1919); Teil II[3]): Mathematische Zeitschrift **11** (1921)] gegeben. In Abschnitt I der Abhandlung sind die vorbereitenden Tatsachen an der Hand der einfachsten Erfahrungen entwickelt. Die Ergebnisse sind in Abschnitt II zu einer Übersicht vereinigt: die Kernbegriffe auf S. 139—142, die Kernsätze auf S. 139—144. Aus diesem „Kern" wird in den Abschnitten III und IV der Begriff der natürlichen Zahl und die dekadische Zahlenschreibung hergeleitet.

6. In Abschnitt I der Abhandlung von 1916 wurden die zum Kern zu rechnenden ersten Erkenntnisse gesammelt und zugleich die einfachsten Folgerungen daraus gezogen. Hervorzuheben ist die Begründung für den „Beweis durch Abschreiten" (S. 133), in der gebräuchlichen Bezeichnung: Beweis durch vollständige Induktion, wo jedoch das Wort Induktion nicht die sonst übliche Bedeutung, die einen Gegensatz zur Deduktion ausdrückt, besitzt. Vom „Schluß von n auf $n+1$" kann dort schon deshalb nicht gesprochen werden, weil der Zahlbegriff und die Addition nicht *vorher* eingeführt werden konnten; der Zahlbegriff wird erst in Abschnitt IV gewonnen und setzt den Beweis durch Abschreiten voraus.

Der Bestand an Kernbegriffen und Kernsätzen für die Arithmetik im Abschnitt II ist umfangreicher, als in meinen früheren Schriften. Dies wurde durch Erwägungen bedingt, die ich in jenen Schriften erwähnt, aber

[3]) Dort ist zu lesen: S. 130 Z. 8 v. u. U_e statt U_r, S. 132 Z. 4 v. u. Nach $\mathfrak{A}$ statt Nach a, S. 150, Z. 7 v. o. D'' statt D'', Z. 9 v. u. Sammlung statt Menge.

nicht durchgeführt hatte, und die mich dazu führten, die Forderung der *Entscheidbarkeit* nunmehr zu berücksichtigen. Nach dieser wird bei der Einführung eines Begriffs durch Definition (abgeleiteter Begriff) eine allgemeine Anweisung gefordert, die es in jedem einzelnen Fall ermöglicht, eine natürliche Zahl n zu bestimmen und höchstens n Urteile aneinanderzureihen mit dem Erfolg, daß mit dem letzten dieser Urteile die Entscheidung darüber gegeben ist, ob die Definition in dem betreffenden Fall zutrifft oder nicht. Diese Forderung bezieht sich jedoch nur auf abgeleitete Begriffe, für Kernbegriffe ist sie gegenstandslos. Auch bei Definitionen, die nur Bezeichnungen für etwas bereits Erkanntes durch andere ersetzen, kommt sie nicht in Betracht.

Der Zahlbegriff wird, wie bemerkt, erst in Abschnitt IV gewonnen, nachdem schon zahlreiche Definitionen für andere Begriffe vorher gegangen sind. Ich muß deshalb der obigen Forderung eine vom Zahlbegriff freie Fassung geben, etwa dahin, daß die allgemeine Anweisung es in jedem einzelnen Fall ermöglichen soll, eine „Kette" von Urteilen (siehe a. a. O. Abschnitt I) herzustellen, unter denen eines die gewünschte Entscheidung geben muß. Der Begriff der Kette (ein Kernbegriff) kann übrigens schon an einer früheren Stelle eingeführt werden, als es a. a. O. geschieht.

7. Welche Sätze sich bei der erwähnten Untersuchung als Kernsätze darboten, darauf kann ich hier nicht eingehen. Dagegen will ich in Kürze die Begriffe andeuten, die sich dabei als Kernbegriffe aufdrängten: *Ding*, *Eigennamen* eines Dinges; *Geschehnis*, insbesondere *Angabe* eines Dinges; *Sammelname* von angegebenen Dingen; früheres und späteres oder *vorangehendes* und *folgendes* Geschehnis, *unmittelbares Folgen*; *Kette* von Geschehnissen. Ich habe diese Begriffe a. a. O. die kombinatorischen genannt; sie treten zutage, wenn man den kombinatorischen (auf Reihenfolge bezüglichen) Bestandteilen, die man in den Gedankengängen der Arithmetik fortwährend wahrnehmen kann, auf den Grund geht. Die Rolle, die diese Begriffe spielen, ist eingehender in den „Grundlagen der Analysis" zur Geltung gebracht.

In der Abhandlung von 1916 mußte der Kürze wegen vielfach auf die früheren Schriften verwiesen werden, hauptsächlich auf die §§ 1—15 der „Grundlagen der Analysis". An diese Paragraphen schließt sich dort der Aufbau der ganzen Arithmetik an, so daß die Erkenntnisse, die ich in Abschnitt II der angezogenen Abhandlung zusammengefaßt habe, sich als *hinreichend* erweisen und zur Arithmetik keinerlei weitere Kernbegriffe oder Kernsätze gebraucht werden. Die Frage, *ob dies auch auf die ganze Analysis ausgedehnt werden kann*, bleibt dabei offen.

Der Inhalt des Abschnitts II bildet hiernach in der von mir benutzten Ausdrucksweise (siehe die Einleitung zu jener Abhandlung) einen

„Stamm“ für die Arithmetik, während ein Teil dieses Inhalts genügt, um als ein „Kern“ zu dienen. Der Kürze halber nenne ich hier den Gesamtinhalt das System S, den Teil das System K. Aus K ist der übrige Inhalt von S abgeleitet worden.

8. Das System S ist aber für die Arithmetik nicht bloß hinreichend, sondern, wie ich in der Abhandlung näher ausgeführt habe, zugleich *notwendig*. Und zwar ist es zum Aufbau der Arithmetik auch in dem Sinn notwendig, daß wir seinen Inhalt besitzen müssen, ehe wir den Zahlbegriff ausbilden. Er geht dem Zahlbegriff in ähnlicher Weise voraus, wie in der Geometrie die gerade Strecke (ursprünglich unter dem Namen: gerade Linie) der heutigen geraden Linie vorausgegangen ist (siehe hier in Nr. 3). Das System K liefert daher „natürliche Grundlagen“ für die Arithmetik im Sinne der Nr. 4, wie ich in Nr. 5 in Aussicht gestellt hatte.

Wenn ich den im System S niedergelegten Stoff für notwendig zu unserem Zweck erkläre, so bezieht sich das nur auf den Gesamtinhalt, nicht auf dessen Gestaltung. Es wird also damit nichts gesagt über die Frage, ob nicht derselbe Inhalt in wesentlich anderer Form gebracht werden kann. Unberührt bleibt insbesondere die Frage, ob nicht eine Umformung möglich wäre, bei der vom Inhalt des Systems K sich ein Teil als abhängig vom übrigen Inhalt darstellt. Die Unentbehrlichkeit des Gesamtinhalts von S wird von diesen Fragen nicht getroffen.

9. Für unentbehrlich darf ich das System S (und um so mehr das System K) auch in dem Sinn erklären, daß die darin ausgesprochenen Erkenntnisse, wie immer man die Arithmetik durch Stammsätze zu begründen suchen mag, in diesen Stammsätzen oder neben ihnen einen Platz zu beanspruchen haben, da man sich in der Arithmetik auf die kombinatorischen Begriffe tatsächlich überall stützt, freilich ohne es besonders zum Ausdruck zu bringen, ja überhaupt zu beachten. Wie es gelingen könnte, die kombinatorischen Grundvorstellungen erst aus einem der anderen, von Mathematikern zur Begründung der Arithmetik ersonnenen Systeme mit mathematischer Strenge abzuleiten, ist nicht wohl abzusehen.

Jene Vorstellungen, schon an sich von äußerster Einfachheit, sind überdies nicht bloß für die Arithmetik und somit überhaupt für die Mathematik unentbehrlich, sondern über deren Grenzen hinaus; sie können aus dem wissenschaftlichen und selbst dem alltäglichen Denken nicht ausgeschaltet werden. Wenn wir uns also zu den das System K zusammensetzenden Erkenntnissen bekennen müssen, so können wir eine besondere Frage, ob Folgerungen aus diesen Erkenntnissen — also aus dem System K — miteinander in Widerspruch geraten können, gar nicht zulassen. Und, wenn man dennoch an einen ausdrücklichen Beweis für die Widerspruchsfreiheit denkt, wie sollte er *ohne* die im System K enthaltenen Hilfsmittel

zustande kommen? In der Tat haben ja auch die verschiedenen Erörterungen über die Begründung der Arithmetik und ihre Widerspruchsfreiheit jener Bestandteile nicht entraten können.

II. Besonderer Teil.

10. Wie ich im vorstehenden ausgeführt habe, sind die Grundvorstellungen und Grundtatsachen, die ich die kombinatorischen nenne (System S), durchaus hinreichend, um einen Stamm zur Herleitung der gesamten Arithmetik zu bilden, und zwar so, daß sich ein Teil davon als Kern herausheben läßt (System K). Weiter habe ich ausgeführt, daß der Gesamtinhalt des Systems S (oder auch des Systems K) unentbehrlich ist bei dem Eintritt in die Arithmetik und bei allem Weiterschreiten in ihr, ja unentbehrlich in allen Denkgebieten überhaupt. Die Unentbehrlichkeit muß sich zeigen, wenn man die überlieferte Arithmetik oder die von den Mathematikern aufgestellten Begründungen der Arithmetik durchprüft. Insofern diese Begründungen teilweise nur als Entwürfe oder doch nicht in vollständiger Durchführung vorliegen, muß man die Durchführung anstreben, um erst darauf ein Urteil zu gründen. Gegenwärtig steht diejenige Begründung der Arithmetik im Vordergrund, die in Hilberts Abhandlung von 1921: Neue Begründung der Mathematik. Erste Mitteilung (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität **1**, Heft 2, 1922) enthalten ist[4]). An diese Begründung der Arithmetik werde ich daher hier anknüpfen, indem es nach dem obigen meine Aufgabe ist, ihr Verhältnis zu der von mir gegebenen zu untersuchen.

11. Meinen Ausgangspunkt bildeten: Ding, Name für das Ding (Eigenname). Ich konnte sagen: Name oder Zeichen für das Ding. Name und Zeichen vertreten das Ding, wenn auch auf verschiedene Art; der Name ist ein gesprochenes Zeichen, das Zeichen ein in einen Körper gebannter Name. Das Ding, dem der Name a (oder das Zeichen a) beigelegt ist, nenne ich die Bedeutung (den Besitzer) des Namens a, das Ding des Namens a; ich werde es hier auch das a-Ding nennen. Doch ist die gebräuchliche Abkürzung: Das Ding a, oder bloß a, nicht zu entbehren. Daran schließe ich: Angabe eines Dinges, das dann der Gegenstand der Angabe wird, usw. Namen und Zeichen für Dinge sind wieder Dinge und unterliegen der Betrachtung.

Zeichen in diesem Sinne ist das nicht, was nach Herrn Hilbert (a. a. O. S. 163) „am Anfang ist“. Die dortigen Zeichen werden unmittelbar

[4]) Fortsetzung: Die logischen Grundlagen der Mathematik. Mathem. Ann. 88 Heft 1/2 (1922).

eingeführt, nicht als Vertreter bestimmter Dinge; sie „sind selbst Gegenstand unserer Betrachtung"; sie sind Dinge, ohne daß hinter ihnen eine „Bedeutung" steht (vgl. den vorigen Absatz). Wenn also Hilbert zuerst das „Zeichen" 1 einführt, so steht dies einfach als ein Ding da. Als solches ist 1 gewählt im Gedanken an die beabsichtigte Anwendung und im Hinblick auf das für diese geltende Herkommen. Indem ich mich über die Rücksicht auf das Herkommen erhebe, sage ich einfach: es wird ein Ding eingeführt, etwa das Ding e, das e-Ding (s. den vorigen Absatz). Außerdem tritt bei Hilbert noch ein Ding $+$ auf; ich verallgemeinere auch dieses, etwa zu einem u-Ding. Ob die weitere Betrachtung mit 1 und $+$ angestellt wird, oder mit e und u, hat auf das Urteil über den logischen Gehalt der Betrachtung keinen Einfluß.

12. Es folgt das „Zeichen" $1 + 1$. Dieses zu erfassen oder zu beschreiben, muß ich 1 angeben (s. Nr. 7); dann $+$, endlich abermals 1. Wesentlich ist demnach nur, daß Angaben von Dingen e und u erfolgen, und zwar nur: zuerst eine Angabe von e, dann eine von u, zuletzt abermals eine von e. Es entsteht also eine Kette von Angaben (s. Nr. 7). Schon bis hierher haben wir die in Nr. 7 aufgeführten Kernbegriffe fast sämtlich anwenden müssen, bei näherem Zusehen zugleich einen Teil der Kernsätze.

Die obige Kette kann ich abkürzend darstellen durch: $e\ u\ e$ (wenn man will: eins und eins) und ihr überdies einen einfachen Namen f geben. An f kann ich eine Angabe von u, an diese eine Angabe von e anschließen und dies beliebig wiederholen. Jede so entstehende Kette beginnt und endigt mit e, zu e benachbart ist immer u, zu u immer e. Umgekehrt: Jede Kette mit diesen Eigenschaften entsteht aus f in der beschriebenen Weise. Man kann geneigt sein, diese Aussagen ohne weiteres auf Erfahrung zu stützen, die durch Versuche gewonnen ist, oder sich auf Anschauung zu berufen, also im Grunde doch auf Erfahrung. Tatsächlich aber weisen jene Aussagen und die zu ihnen erforderliche Begriffsbildung, einigermaßen näher betrachtet, auf einfachere Bestandteile zurück, und das sind die zum System K verbundenen Begriffe und Sätze. Diese freilich durften unmittelbar auf Erfahrung gestützt werden.

Das Ding e und die in Absatz 1 definierten Ketten nenne ich hier *Marken*, um nicht jetzt schon von Zahlen oder Zahlzeichen zu reden. An die Stelle jeder von e verschiedenen Marke soll jede mit ihr konforme (siehe: Der Ursprung des Zahlbegriffs, Abschnitt IV, Nr. 7) treten dürfen. Die Marke e soll niedriger als die anderen, diese höher als e heißen. Wie oben aus f, so entstehen aus jeder von e verschiedenen Marke $\mathfrak{M}$ weitere Marken, die höher als $\mathfrak{M}$ heißen sollen. Unter den Marken, die höher als $\mathfrak{M}$ sind, ist eine die niedrigste; sie wird die nächstfolgende zu $\mathfrak{M}$.

Diese oder ähnliche Festsetzungen und Behauptungen werden gebraucht, wenn man die Marken handhabt. Sie bedürfen näherer Ausführung; das dazu Erforderliche ist in der eben angezogenen Abhandlung gegeben. Ich muß hervorheben, daß dabei der „Beweis durch Abschreiten" (s. hier Nr. 6) gebraucht wird.

13. Der Sache nach habe ich das beibehalten, was Herr Hilbert a. a. O. S. 163 f. vorträgt, nur die Darstellung habe ich geändert, um auf meine Untersuchungen Bezug nehmen zu können und (wie in Nr. 10 angekündigt) die Unentbehrlichkeit des Systems S (und mithin des Systems K) an einem Gedankengang, der die Aufmerksamkeit der Mathematiker in Anspruch nimmt, aufzuweisen. Mit Hilberts Äußerung, daß dabei „keinerlei Widersprüche möglich sind", daß also für die Widerspruchsfreiheit kein *Beweis* nötig ist, stimmt es überein, wenn ich in der Abhandlung von 1916, in der die Frage der Widerspruchsfreiheit eine Hauptrolle spielt, die Widerspruchsfreiheit des Kerns K begründete, ohne einen mathematischen Beweis dafür zuzulassen (s. hier Nr. 9).

Hilbert macht zur Begründung der Widerspruchsfreiheit geltend, daß es in seiner Betrachtung „keine Axiome gibt". Seine Betrachtung kommt aber nach dem obigen auf mein System S hinaus; dieses liegt in Abschnitt II meiner Abhandlung, wo es auf das System K zurückgeführt ist, schon in axiomatischer Vollendung vor. Und auf die Natur des Systems K stützt sich mein Urteil über die Widerspruchsfreiheit.

14. In der Abhandlung von 1916 schließt sich an das System S die Erörterung über *Zuordnung* an, die den Übergang zu den *natürlichen Zahlen* ermöglicht. Die Zahlen werden einer beliebigen Rotte von Dingen entnommen, die jedoch festgehalten werden soll. Dies kann nun so geschehen, daß ich als Glieder der Rotte „Marken" wähle, als erstes Glied die Marke e, als nächstfolgendes die Marke f (s. oben Nr. 12, Abs. 1), überhaupt nach jeder Marke als nächstfolgendes Glied die nächsthöhere Marke (s. Nr. 12, Abs. 3). Jetzt steht nichts mehr im Wege, die Dinge, die ich einstweilen Marken genannt hatte, Zahlen zu nennen. Solche Zahlen können wir in beliebigem Umfang, dem jedesmaligen Bedürfnis entsprechend, bilden.

Der letzte Schritt in der angezogenen Abhandlung führt zu den tatsächlich gebräuchlichen Namen und Zeichen für die Zahlen, den dekadischen. Besitzt man dieses Hilfsmittel, so spielt die Rotte, aus der ursprünglich die Zahlen, nötigenfalls durch Erweiterung der Rotte, geschöpft werden mußten, keine Rolle mehr. Für die Marke e besitzt man jetzt das Zeichen 1. Um aber auch für die übrigen Marken die Schreibung einzuführen, die der Gepflogenheit entspricht, also z. B. für f oder $e\ u\ e$ oder $1\ u\ 1$ die Schreibung $1 + 1$, muß ich einiges über Addition vorwegnehmen,

wenn ich den Vorgang nicht entgegen meiner Betrachtungsweise bloß als willkürliche Festsetzung hinstellen will. Dann ist auch die äußerliche Anpassung an das, was Hilbert an die Spitze der Arithmetik stellt, erreicht.

15. Auch an den weiteren Betrachtungen des Herrn Hilbert bestätigt sich, wenn man der logischen Struktur nachgeht, daß die Anwendung des Systems S nicht zu umgehen ist. Auf diese Feststellung kann, genau zergliedert, das zurückgeführt werden, was Herr Th. Skolem in Christiania in der Abhandlung: Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre (Congrès des Mathématiques à Helsingfors 1922, V^e Congrès des Mathématiciens Skandinaves) geltend macht, besonders gegenüber Hilberts Beweis des von diesem auf S. 170 aufgestellten Hilfssatzes. Skolems Ablehnung künstlicher Begründungen führt zur Bevorzugung natürlicher Begründungen, auf die ich Gewicht gelegt habe.

Das System S war zustande gekommen durch Neubearbeitung der §§ 1—15 der „Grundlagen der Analysis“ in der Abhandlung von 1916. Dabei konnte der Inhalt dieser Paragraphen zum größten Teil beibehalten werden, so daß Hinweise darauf genügten. Somit erreicht der Bestand an Definitionen und Lehrsätzen, den die Abhandlung letztlich darstellt, einen beträchtlichen Umfang, der auf den ersten Blick befremden mag. Tatsächlich aber sind die in jenen Paragraphen angesammelten Hilfsmittel, die abgesehen von der Fassung nur allgemein Anerkanntes enthalten, unentbehrliche Bestandteile der Kombinatorik und in der Mathematik, ja über deren Grenzen hinaus überall wirksam. Sie werden aus dem System S durch rein deduktives Verfahren gewonnen und teilen also mit S die Eigenschaft, zu einem Widerspruch nicht führen zu können.

16. Die letzte Bemerkung kann ich auf die ganze Arithmetik ausdehnen (s. Nr. 7 und 9). Ich darf mithin nunmehr von Gleichheit, Summe und Differenz Gebrauch machen und folgende Sätze aufstellen:

$$a = a, \quad 1 + (a + 1) = (1 + a) + 1,$$

usw., wie bei Hilbert auf S. 168—176. Dort bilden diese Sätze die „Tabelle von Axiomen“ (S. 168), die einen Stamm für die Arithmetik darstellen soll. Natürlich stimmen die Axiome, als Stammsätze für die Arithmetik, mit den von mir oben aufgestellten Sätzen, die ich das System T nennen will, nur im Aussehen überein, nicht im Sinn. Das $=$ soll noch nicht das uns geläufige Gleichheitszeichen sein, die 1 noch nicht die uns vertraute Ziffer, usw. Um dies augenfällig zu machen, sage ich etwa: Das a-Ding steht in der g-Beziehung zum a-Ding; weiter verallgemeinere ich die 1 wie früher zu einem e-Ding, usw. Eine solche Umformung ist erforderlich, damit die Begriffe, die in den Stammsätzen als Stammbegriffe wirksam sind, heraustreten.

Die g-Beziehung erscheint hier als Deckname für die Beziehung der Gleichheit, das e-Ding als Deckname für die 1, usw.; siehe: Mathematik und Logik, Leipzig, Wilhelm Engelmann, 1919. Durch Einführung solcher Decknamen erheben wir uns vom System T zu einem Stamm V, den ich als eine Formalisation von T bezeichne, umgekehrt T als eine Realisation von V, s. die eben angeführte Schrift. Da das System T aus dem Kern der Arithmetik gefolgert war und deshalb zu einem Widerspruch nicht führen kann, muß ich die Formalisation V und damit die Hilbertsche Tabelle ohne weiteres als widerspruchsfrei anerkennen.

17. Der Gebrauch von Formelschrift setzt eine Anweisung voraus, die es gestattet, den Formelinhalt vollständig und eindeutig in der gewöhnlichen Sprache auszudrücken. Eine solche Anweisung liegt für die Hilbertsche Tabelle nicht vor. Deshalb habe ich den Übergang vom System T zum System V in Nr. 16 nur angedeutet, nicht ausgeführt, um eine nicht zutreffende Übertragung zu vermeiden. Infolgedessen ist dort auch eine exakte Angabe der Begriffe (Ding- und Beziehungsbegriffe), die im Stamme V als Stammbegriffe zu gelten haben, unterblieben. Bei einer genauen Fassung des Stammes V würde sich zeigen, auf welche Weise in V das System S wirksam ist und mithin durch besondere Axiome vertreten zu sein beanspruchen kann. Daß das System S auch ohnehin heranzuziehen ist, habe ich schon in Nr. 13 und in Anlehnung an Th. Skolem in Nr. 15 bemerkt.

18. Ich war von der Ansicht ausgegangen, daß die axiomatische Bearbeitung der Mathematik vor allem gewisse, miteinander in Zusammenhang stehende Forderungen erfüllen soll (Nr. 2, Absatz 2). Im weiteren habe ich hauptsächlich auf die Begründung der Arithmetik in meiner Abhandlung von 1916 Bezug genommen und bin von dem darin eingenommenen Standpunkte aus auf die Betrachtungen von Hilbert eingegangen. Dabei habe ich mich auf die Arithmetik beschränkt (s. Nr. 7), während ich in den „Grundlagen der Analysis“ die gesamte Analysis einbezogen hatte. Ich habe aber schon damals angedeutet, daß ich hinsichtlich der Analysis Vertrauen nicht in dem Maße hegte, wie hinsichtlich der Arithmetik. An diese Andeutungen anknüpfend, habe ich in „Veränderliche und Funktion“ (§ 76) dem von jenen Bedenken nicht getroffenen Rechnen ein „uneigentliches Rechnen“ gegenübergestellt und in der mehrerwähnten Abhandlung von 1916 dieser Unterscheidung Rechnung zu tragen gesucht (s. hier Nr. 6).

(Eingegangen am 30. September 1923.)

Zur Theorie der Voßschen und der Guichardschen Flächen.

Von

E. Salkowski in Hannover.

1. *Ziel und Hilfsmittel zur Untersuchung.* Die Flächen, auf denen ein konjugiertes Netz von geodätischen Linien vorliegt, sind zum ersten Male von A. Voß betrachtet worden. In seiner für diese Frage grundlegenden Arbeit[1]) zeigte er, daß die Gaußsche Abbildung des geodätisch-konjugierten Systems ein Netz von äquidistanten Kurven auf der Bildkugel bestimmt, daß sie also mit dem sphärischen Bilde der Asymptotenlinien einer Fläche konstanter Krümmung übereinstimmt. Dasselbe Ergebnis fand Guichard[2]), als er die Linienkongruenzen suchte, deren abwickelbare Flächen auf den Brennflächen das Netz der Krümmungslinien ausschneiden. Es ergab sich nämlich, daß das sphärische Bild der abwickelbaren Flächen einer derartigen „Guichardschen" Kongruenz gleichfalls ein äquidistantes sphärisches Netz ist und daß andererseits für die Brennflächen dieser Guichardschen Kongruenzen ein Mantel der Evolute immer eine Voßsche Fläche sein muß. Später hat dann Bianchi[3]) den auch schon von Guichard erwähnten besonderen Fall genauer untersucht, in dem die Strahlen der Guichardschen Kongruenz mit den Radienvektoren ihrer Brennpunkte einen konstanten Winkel bilden, während Kommerell[4]), der die reizvolle Untersuchung in sein Lehrbuch der Differentialgeometrie aufnahm, eine gleichfalls von Guichard bereits aufgenommene Frage der Transformation Guichardscher Flächen weiter verfolgte. Den Zusammenhang mit der Theorie der Flächen konstanter Krümmung benutzte sodann

---

[1]) A. Voß, Münch. Ber. 1888.

[2]) C. Guichard, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 7 (1890), S. 233–264.

[3]) L. Bianchi, Rom. Acc. L. Rend. (5) 24_2 (1915), S. 221.

[4]) K. Kommerell, Spezielle Flächen und Theorie der Strahlensysteme, § 30; insbesondere S. 142, (Leipzig, Göschen 1911).

Eisenhart[5]), um im Anschluß an die Bäcklundsche Transformation eine Transformationstheorie der Voßschen Flächen zu entwickeln. In einen größeren Zusammenhang eingeordnet wurde diese Fragestellung, als Bianchi[6]) erkannte, daß die Guichardschen Kongruenzen das wichtigste Beispiel von Strahlensystemen darstellen, die auf unendlich viele Weisen zyklisch sind.

Das eben kurz geschilderte Bild gewinnt noch an Farbe, wenn man die merkwürdigen Zusammenhänge zwischen den verschiedenen beteiligten Flächen und Kongruenzen nicht nur mit Hilfe der Rechnung, sondern mit anschaulichen Hilfsmitteln zu ordnen sucht. Es zeigt sich, daß alle bisher bekannten Ergebnisse sich mit mancherlei Neuem in einen einfachen Zusammenhang einfügen, sobald man auch nur die bekanntesten Tatsachen der Kurven- und Flächentheorie voraussetzt. So reizvoll es wäre, auch die letzteren, soweit sie hier gebraucht werden, mit Hilfe geometrischer Betrachtungen zu entwickeln — eine für die Kurventheorie bereits gelöste, für die Flächentheorie durchaus lösbare Aufgabe —, so soll doch hier darauf verzichtet werden, um möglichst schnell zu dem besonderen geometrischen Zusammenhang fortzuschreiten, der uns hier interessiert. Es seien nur diejenigen Hilfsmittel noch einmal in das Gedächtnis zurückgerufen, die den weiteren Entwickelungen zugrunde liegen.

1. Die Normalenkongruenz einer nicht abwickelbaren Fläche besitzt zwei reelle Brennflächen, die auch in Kurven oder Punkte ausarten können; diese enthalten die Brennpunkte der Kongruenz und werden von ihren Brennebenen eingehüllt.

2. Die Brennebenen eines Strahls einer Normalenkongruenz stehen aufeinander senkrecht und schneiden die Ausgangsfläche in den Richtungen der Krümmungslinien.

3. Die abwickelbaren Flächen der Normalen längs einer Krümmungslinie u_1 haben Gratlinien g_1, die auf der ersten Brennfläche C_1 geodätisch sind, und die Schmiegungsebenen von g_1 umhüllen die zweite Brennfläche C_2. Ein gleiches gilt bei Vertauschung der Indizes 1 und 2.

4. Die erste Schar von Brennebenen sind die Schmiegungsebenen der geodätischen Linien g_1 des ersten Brennmantels, die zweite Schar wird von den Normalebenen der Krümmungslinien u_1 der Ausgangsfläche gebildet; sie umhüllen die Polarflächen der Kurven u_1 und berühren die Fläche C_2, wo sie die zu g_1 konjugierte Richtung bestimmen.

2. *Geometrische Herleitung der grundlegenden Beziehungen zwischen Guichardschen Kongruenzen und Voßschen Flächen.* Es seien (P_1)

[5]) L. Pf. Eisenhart, Palermo Rend. 42 (1917), S. 145–166.
[6]) L. Bianchi, Annali di Mat. (2) 18, § 3, S. 314.

und (P_2) die Brennflächen eines Guichardschen Strahlensystems, und zwar mögen dessen Strahlen gleichzeitig die Krümmungslinien u_1 ($v =$ konst.) der Fläche P_1 und die Krümmungslinien v_2 ($u =$ konst.) der Fläche P_2 berühren.

Die Tangenten einer Kurve u_1 auf (P_1) sind erzeugende Geraden g der Guichardschen Kongruenz; sie berühren die zweite Brennfläche (P_2) in der zur Krümmungslinie v_2 konjugierten Richtung, d. h. längs einer Krümmungslinie der zweiten Schar u_2. Da diese die Geraden g senkrecht schneidet, so ist sie eine Filarevolvente der Kurve u_1.

a) *Die Krümmungslinien u_2 des zweiten Brennmantels sind Filarevolventen der Krümmungslinien u_1 des ersten Brennmantels einer Guichardschen Kongruenz.* Ebenso ist die Krümmungslinie v_1 der Fläche (P_1) Evolvente der Krümmungslinie v_2 auf (P_2).

Da die Schmiegungsebene von u_1 Berührungsebene von (P_2) ist, so ist die Normale von (P_2) parallel zur Binormalen der Kurve u_1; hieraus folgt der Satz:

b) *Die Normale zu dem einen Brennmantel einer Guichardschen Kongruenz ist parallel zur Binormale der von den Kongruenzstrahlen auf dem anderen Brennmantel umhüllten Krümmungslinie.*

Die Zentrafläche von (P_1), die von den Evoluten der u_1-Kurven gebildet wird, V_1 (mit V_i sei durchweg eine Voßsche Fläche bezeichnet), wird von den Normalebenen der u_1-Kurven berührt; in jedem Punkte von V_1 bilden daher die Flächennormale und die Polarachse der u_1-Kurve ein konjugiertes Richtungspaar. Betrachtet man andererseits die Zentrafläche V_2 von (P_2), die von den Evoluten der v_2-Kurven gebildet sind, so bilden dort die Normalenrichtung von (P_2) und die Richtung der Polarachse von v_2 ebenfalls ein konjugiertes Richtungspaar. Da aber die Polarachse einer Kurve zu ihrer Binormale parallel ist, so ergibt sich, daß das (uv)-System auf der Fläche V_1 dem (uv)-System auf der Fläche V_2 parallel zugeordnet ist. Die u-Kurven auf V_1 sind nun die Hüllkurven der Normalen von (P_1); sie bilden nach Satz **1**, 3 geodätische Linien auf V_1; ihnen auf V_2 parallel zugeordnet sind die Hüllkurven der Krümmungsachsen der Krümmungslinien v_2. Die v-Kurven auf V_1 sind von den Krümmungsachsen der u_1-Kurven auf (P_1) eingehüllt; diese sind parallel zu den geodätischen Linien auf V_2, die von den Normalen längs den v_2-Krümmungslinien von (P_2) eingehüllt werden. Da nun auf der einen Fläche die u-Kurven, auf der andern die v-Kurven geodätisch sind, so folgt aus der Parallelzuordnung nach elementaren kurventheoretischen Sätzen:

c) *Für die Brennflächen (P_1), (P_2) eines Guichardschen Strahlensystems sind diejenigen Evolutenmäntel parallel zugeordnete Voßsche*

Flächen (V_1) und (V_2), die den Gratlinien der abwickelbaren Flächen der Kongruenz entsprechen.

Aus den Eigenschaften der parallelen Zuordnung von Kurvennetzen ergibt sich weiter, daß eine neue (V_1) und (V_2) parallel zugeordnete Voßsche Fläche entsteht, wenn man entsprechende Punkte von (V_1) und (V_2) verbindet und die Strecke $V_1 V_2$ in V nach einem beliebigen konstanten Verhältnis teilt. Die Normalen der Fläche (V) sind dann ebenso wie die von (V_1) und (V_2) parallel zu den entsprechenden Strahlen der Guichardschen Kongruenz, und die Berührungsebenen von (V) teilen somit auch den Abstand der Brennpunkte $P_1 P_2$ in P nach demselben konstanten Verhältnis. Somit gilt der Satz von Guichard und K. Kommerell:

d) *Die Ebenen, die den Brennpunktsabstand einer Guichardschen Kongruenz in einem konstanten Verhältnis senkrecht schneiden, umhüllen eine Voßsche Fläche, insbesondere ist die Hüllfläche der Mittelebenen (Mittelenveloppe) eine Voßsche Fläche.*

Die Art und Weise, durch die hier die Fläche (V) aus (V_1) und (V_2) erhalten wird, ist bis auf eine Ähnlichkeitstransformation identisch mit einer in der Theorie der konvexen Körper grundlegenden Konstruktion. Zieht man nämlich von einem beliebigen Aufpunkte O aus die Radienvektoren $\mathfrak{v}_1 = O V_1$ und $\mathfrak{v}_2 = O V_2$ nach den Punkten der parallel zugeordneten Voßschen Flächen, *so beschreibt der Endpunkt V des Radiusvektors*

$$\mathfrak{v} = k_1 \mathfrak{v}_1 + k_2 \mathfrak{v}_2$$

eine der ersten parallel zugeordnete Voßsche Fläche, wenn k_1 und k_2 beliebige Konstanten sind. Für $k_1 = -k_2 = 1$ ergibt sich hieraus:

e) *Konstruiert man diejenigen Ebenen, deren Abstand von einem festen Punkte aus gleich dem Brennpunktabstand der Strahlen einer Guichardschen Kongruenz ist, so umhüllen diese eine Voßsche Fläche, die den Evolutenmänteln der Brennflächen der Kongruenz parallel zugeordnet ist.*

Zu den Guichardschen Flächen gehört in erster Linie die Kugel, da auf ihr jedes konjugierte System als Krümmungsnetz anzusehen ist; dabei wird die Voßsche Fläche sich auf den Mittelpunkt reduzieren und das geodätische Kurvennetz in ein Nullnetz im Guichardschen Sinne. Die einfachste Guichardsche Kongruenz ist demnach die Kongruenz der gemeinsamen Tangenten an zwei Kugelflächen. Es verlohnt sich wohl, diesen Fall, den Guichard bereits auf elliptische Funktionen zurückgeführt hat, auch geometrisch etwas genauer zu betrachten. Dies soll in **Nr. 6** geschehen.

3. *Die Ergänzungsflächen der Voßschen Flächen.* Die Normalenkongruenz der Guichardschen Fläche (P_1) besitzt außer (V_1) einen zweiten Brennmantel (Q_1), die *Ergänzungsfläche* zu (V_1). Auf dieser sind die Kurven v geodätisch, sie sind Filarevoluten der v-Kurven auf (P_1). Eine zweite Filarevolute dieser Kurven aber war, wie in Nr. 2 gezeigt, die v-Kurve auf P_2. Die Normalebene $Q_1 P_1 P_2$ dieser Kurven sind somit die gemeinsamen rektifizierenden Ebenen für die v-Kurven auf (Q_1) und auf (P_2), und die Linien $P_2 Q_1$ sind die Polarachsen der v-Kurven auf der Fläche (P_1). Dieser Sachverhalt ergibt eine leichte Übersicht über den Zusammenhang einer gegebenen Voßschen Fläche V_1, den mit ihr verknüpften Guichardschen Evolventenflächen, Guichardschen Kongruenzen und der zugeordneten Voßschen Fläche.

f) *Man konstruiere an die u-Kurven der Fläche (V_1) die Tangenten, bestimme eine beliebige Orthogonalfläche (P_1) zu diesen und den zweiten Brennmantel (Q_1) der Tangentenkongruenz. Auf dem letzteren konstruiere man die v-Kurven, das sind die Gratlinien der abwickelbaren Flächen, und die rektifizierenden Geraden r dieser Linien. Zieht man nun durch die Punkte von (P_1) die Parallelen g zu den entsprechenden Normalen von (V_1), so bilden diese eine Guichardsche Kongruenz, deren zweite Brennfläche durch die Schnittpunkte der Kongruenzstrahlen g mit den rektifizierenden Geraden r bestimmt sind.*

Ersetzt man (P_1) durch eine Parallelfläche, so verschieben sich die Brennpunkte (P_2) auf den rektifizierenden Geraden (r).

Da auf einer Voßschen Fläche die Kurven (u) und (v) gleichberechtigt sind, so existiert zu (V_1) noch eine zweite Ergänzungsfläche (Q_1); die von den Tangenten an die geodätischen Linien v umhüllt wird, d. h. von den Polarachsen der u-Kurven von (P_1). Diese sind parallel zu den Normalen von (P_2), ihre Hüllkurven sind ferner auf $(\bar{Q}_1)$ geodätisch; andererseits sind die Hüllkurven der Normalen um (P_2) auf der Ergänzungsfläche (Q_2) von (V_2) geodätisch. Hieraus folgt, daß $(\bar{Q}_1)$ und (Q_2) in entsprechenden Punkten parallele Tangentialebenen haben und ihre Parameterkurven einander parallel zugeordnet sind. Nimmt man schließlich noch die zweite Ergänzungsfläche $(\bar{Q}_2)$ der Voßschen Fläche (V_2) hinzu, so hat man eine bemerkenswerte Flächenzuordnung gewonnen, die mit einem Guichardschen Strahlungssystem verknüpft ist und die so gekennzeichnet werden kann:

g) *Mit einem Guichardschen Strahlensystem sind zwei Voßsche Flächen V_1 und V_2 verknüpft, deren geodätische Netze sich parallel zugeordnet sind. Konstruiert man für die Tangenten dieses Netzes die zweiten Brennflächen, so sind diese vier Ergänzungsflächen sich paarweise*

parallel zugeordnet, wobei sie mit den Brennflächen der Guichardschen Kongruenz in der durch den Satz f) *gekennzeichneten Beziehung stehen.*

4. *Formeltabellen.* Ehe man weitere Einzelfragen verfolgt, ist es zur Erhaltung der Übersicht ratsam, die anschaulich gewonnenen Ergebnisse durch ein zweckmäßiges analytisches Formelgerüst zu stützen. Um überflüssige Wiederholungen zu vermeiden, gehen wir von den Formeln aus, die Guichard in seiner grundlegenden Arbeit hergeleitet hat. Ein Punkt P sei durch seine Koordinaten (x^1, x^2, x^3) dargestellt, die den Radiusvektor x bestimmen mögen. Statt der Ableitungen der Koordinaten sei zur formalen Vereinfachung die Ableitung des Vektors geschrieben. Die Brennflächen der Guichardschen Kongruenz seien in dieser Bezeichnung $(P_1) = x$, $(P_2) = x'$, der Brennpunktabstand $|x' - x| = 2\varrho$, sowie die Richtungen der u, v-Kurven und der Normalen der Fläche (P_1) der Reihe nach ξ, η, ζ, auf (P_2) die Richtungen der v, u-Kurven und der Normalen entsprechend ξ', η', ζ'. Dann ist[7]):

$$x_u = -2\varrho_u \xi, \qquad x_v = -2\varrho\eta, \tag{1}$$

wobei ϱ der Differentialgleichung

$$\varrho_{uv} = \varrho \cos\varphi \tag{2}$$

und φ der Gleichung der Flächen konstanter Krümmung

$$\varphi_{uv} = \sin\varphi \tag{3}$$

genügt. Die Frenet-Knoblauchschen Formeln für das $\xi\eta\zeta$-System lauten hier:

$$\begin{aligned} \zeta_u &= \sin\varphi \cdot \xi, & \zeta_v &= \varphi_v \eta, \\ \xi_u &= -\sin\varphi\,\zeta - \cos\varphi\,\eta = -\eta', & \xi_v &= \eta, \\ \eta_u &= \cos\varphi\,\xi, & \eta_v &= -\varphi_v \zeta - \xi. \end{aligned} \tag{4}$$

Die beiden Hauptkrümmungshalbmesser sind für $v =$ konst. bzw. für $u =$ konst.

$$R_1 = \frac{2\varrho_u}{\sin\varphi}, \qquad R_2 = \frac{2\varrho}{\varphi_v}. \tag{5}$$

Für die Fläche $(P_2) = x' = x + 2\varrho\xi$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \zeta' &= -\zeta\cos\varphi + \eta\sin\varphi, & x'_u &= -2\varrho\eta', \\ \xi' &= -\xi, & x'_v &= 2\varrho_v\xi = -2\varrho_v\xi', \\ \eta' &= \zeta\sin\varphi + \eta\cos\varphi \end{aligned} \tag{6}$$

---

[7]) Guichard, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 7 (1890), S. 233–264.

und die Frenetschen Formeln des $(\xi'\eta'\zeta')$-Systems lauten:

$$(7)\quad \begin{aligned} \zeta'_u &= \varphi_u \eta', & \zeta'_v &= \sin\varphi\,\xi', \\ \xi'_u &= \eta', & \xi'_v &= -\sin\varphi\,\zeta' - \cos\varphi\,\eta' = -\eta, \\ \eta'_u &= -\varphi_u \zeta' - \xi', & \eta'_v &= \cos\varphi\,\xi', \end{aligned}$$

während die Hauptkrümmungshalbmesser die Werte annehmen (für $v =$ konst. bzw. $u =$ konst.):

$$(8)\qquad R'_1 = \frac{2\varrho}{\varphi_u}, \qquad R'_2 = \frac{2\varrho_v}{\sin\varphi}.$$

Für die Voßsche Fläche $(V_1) = y$ ergibt sich nach leichter Rechnung:

$$(9)\qquad y = x + R_1\zeta = x + \frac{2\varrho_u}{\sin\varphi}\zeta,$$

$$(10)\qquad y_u = R_{1u}\zeta, \qquad y_v = -\frac{R_{1v}}{\cos\varphi}\zeta'.$$

Für die Ergänzungsflächen $(Q_1) = z$ und $(\bar{Q}_1) = \bar{z}$ von (V_1) findet man:

$$(11)\quad \begin{aligned} z &= x + R_2\zeta = y + 2\cdot\left(\frac{\varrho}{\varphi_v} - \frac{\varrho_u}{\sin\varphi}\right)\zeta, \\ z_u &= 2\sin\varphi\cdot\left(\frac{\varrho}{\varphi_v} - \frac{\varrho_u}{\sin\varphi}\right)\left(\xi - \frac{\xi}{\varphi_u}\right), \\ z_v &= R_{2v}\zeta, \end{aligned}$$

$$(12)\quad \begin{aligned} \bar{z} &= y + t\zeta', \\ \bar{z}_u &= (t_u - t\varphi_u \operatorname{ctg}\varphi)\zeta', \\ \bar{z}_v &= t\sin\varphi\cdot\left(\xi' - \frac{\zeta'}{\varphi_u}\right), \end{aligned}$$

wobei

$$(13)\qquad t = -\frac{2\varrho_{uu}}{\varphi_u} + 2\varrho_u \operatorname{ctg}\varphi$$

gesetzt ist. Aus der Form des Bogenelements ihres Gaußschen Bildes ergibt sich, daß (u, v) auf ihnen niemals, wie auf (V_1) und (V_2), ein geodätisches Netz bilden können, d. h. es gibt keine Normalenkongruenzen, deren Brennmäntel beide Voßsche Flächen sind. Entsprechend erhält man die folgende Formeltabelle für die mit $(P_2) = x'$ zusammenhängenden Flächen. Für $(V_2) = y'$ wird:

$$(14)\qquad y' = x' + R'_2\zeta' = x' + \frac{2\varrho_v}{\sin\varphi}\zeta',$$

$$(15)\qquad y'_u = \frac{R'_{2u}}{\cos\varphi}\zeta, \qquad y'_v = R'_{2v}\zeta'.$$

Für $(Q_2) = z'$ ist:

$$z' = x' + R_1'\zeta' = x' + \frac{2\varrho}{\varphi_u}\zeta' = y' + 2\left(\frac{\varrho}{\varphi_u} - \frac{\varrho_v}{\sin\varphi}\right)\zeta',$$

$$z_u' = R_{1u}'\zeta', \tag{16}$$

$$z_v' = 2\sin\varphi\cdot\left(\frac{\varrho}{\varphi_u} - \frac{\varrho_v}{\sin\varphi}\right)\left(\xi' - \frac{\zeta'}{\varphi_u}\right),$$

Endlich findet man für $\bar{Q}_2 = \bar{z}'$:

$$\bar{z}' = y' + t'\zeta,$$

$$\bar{z}_u' = -t'\sin\varphi\cdot\left(-\xi + \frac{\zeta}{\varphi_u}\right), \tag{17}$$

$$z_v' = (t_v' + t'\varphi_v\operatorname{ctg}\varphi)\zeta,$$

wobei

$$t' = -\frac{2\varrho_{vv}}{\varphi_v} + 2\varrho_v\operatorname{ctg}\varphi \tag{18}$$

zu setzen ist. Man überzeugt sich leicht, daß der geometrische Inhalt dieser Formeln mit den in Nr. 2 hergeleiteten Tatsachen übereinstimmt.

Eine unmittelbare Folge der Frenetschen Gleichungen ist die Tatsache, daß ξ derselben Differentialgleichung genügt wie ϱ:

$$\xi_{uv} = \xi\cos\varphi. \tag{19}$$

Ist endlich r der Abstand der Tangentialebene der Voßschen Fläche y vom Nullpunkte

$$r = (\xi y) = (\xi x),$$

so wird

$$r_u = (\xi_u y) + (\xi y_u) = (\xi_u y),$$

da ja $(\xi\zeta) = 0$ ist. Sodann

$$r_{uv} = (\xi_{uv} y) + (\xi_u y_v) = (\xi y)\cos\varphi,$$

da auch $(\xi\zeta') = 0$ ist. Somit genügt auch r der Differentialgleichung

$$r_{uv} = r\cos\varphi, \tag{20}$$

die für ξ und ϱ gefunden war.

Neben die von Guichard bereits angegebene Transformation einer Guichardschen Kongruenz in gleichartige unter Erhaltung des sphärischen Bildes der abwickelbaren Flächen tritt hier eine neue, indem man aus einer bekannten Kongruenz (ξ, ϱ) eine Voßsche Fläche mit den Ebenenkoordinaten (ξ, ϱ) explizit herleitet und ihre Evolventenflächen bestimmt.

5. *Die mit einer Voßschen Fläche verbundenen Guichardschen Kongruenzen.* Sind (ξ, r) die Ebenenkoordinaten einer Voßschen Fläche, so wird auf Grund der Weingartenschen Formeln die Fläche als Punktort durch die Gleichung gekennzeichet:

$$\mathfrak{y} = r\xi - \frac{1}{\sin\varphi}(r_u\zeta - r_v\zeta') \tag{21}$$

und es wird

$$\mathfrak{y}_u = p\,\zeta, \qquad \mathfrak{y}_v = q\,\zeta', \tag{22}$$

wobei

$$\begin{aligned} p &= \frac{\varphi_u}{\sin^2\varphi}(r_v + r_u\cos\varphi) - \left(\frac{r + r_{uu}}{\sin\varphi}\right), \\ q &= \frac{-\varphi_v}{\sin^2\varphi}(r_u + r_v\cos\varphi) + \frac{r + r_{vv}}{\sin\varphi} \end{aligned} \tag{23}$$

zu setzen ist, und zwischen p und q die Beziehungen

$$p_v = -(q\cos\varphi)_u, \qquad p\,\varphi_v = (q\sin\varphi)_u$$

oder die gleichwertigen

$$q_u = -(p\cos\varphi)_v, \qquad q\,\varphi_u = (p\sin\varphi)_v$$

bestehen, die aus den beiden Werten

$$\mathfrak{y}_{uv} = (p\,\zeta)_v = (q\,\zeta')_u$$

hervorgehen.

Eine Guichardsche Kongruenz, deren Geraden auf den Berührungsebenen dieser Voßschen Fläche senkrecht stehen und deren Parameterflächen abwickelbar sind, wird nun durch folgende Überlegung erhalten. Der Punkt, in dem der Strahl der Kongruenz die Tangentialebene der Fläche $\mathfrak{y}$ schneidet, sei

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + \lambda\,\zeta + \mu\,\zeta'. \tag{24}$$

ξ ist die Richtung des Strahls, und

$$d\mathfrak{z}^2 = du^2 - 2\cos\varphi\,du\,dv + dv^2$$

ist nach den Frenetschen Formeln (4) das sphärische Bild der Kongruenz. Sind

$$L = -(\varphi_u\xi_u), \qquad M = -(\varphi_v\xi_u), \qquad \overline{M} = -(\varphi_u\xi_v), \qquad N = -(\varphi_v\xi_v)$$

die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der Kongruenz, so lautet die Bedingung dafür, daß die Flächen $u =$ konst. und $v =$ konst. abwickelbar sind, in unserem Falle:

$$L\cos\varphi + \overline{M} = 0, \qquad N\cos\varphi + M = 0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} L &= (p + \lambda_u)\sin\varphi + \lambda\,\varphi_v\cos\varphi, \\ M &= (\lambda\sin\varphi)_v, \\ \overline{M} &= (\mu\sin\varphi)_u, \\ N &= (q + \mu_v)\sin\varphi + \lambda\,\varphi_v. \end{aligned} \tag{25}$$

Man erhält somit die allgemeinste Guichardsche Kongruenz, deren abwickelbare Flächen dasselbe sphärische Bild haben wie das geodätische

Netz der gegebenen Voßschen Fläche, wenn man λ und μ in der Gleichung (24) als Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \mu_u &= (p + \lambda_u)\cos\varphi, \\ \lambda_v &= (q + \mu_v)\cos\varphi \end{aligned} \tag{26}$$

bestimmt. Für λ und μ ergeben sich damit die Differentialgleichungen 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} \lambda_{uv} + \varphi_v \operatorname{ctg}\varphi\, \lambda_u + \frac{\varphi_u}{\sin\varphi\cos\varphi}\lambda_v &= 0, \\ \mu_{uv} + \frac{\varphi_v}{\sin\varphi\cos\varphi}\mu_u + \varphi_u \operatorname{ctg}\varphi \cdot \mu_v &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Die Brennpunkte sind durch ihren Abstand ϱ von ξ gekennzeichnet; daher ist ϱ eine Wurzel der Gleichung

$$\varrho^2 - (L + N)\varrho + LN = 0,$$

so daß

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= L = -\frac{(\mu\sin\varphi)_u}{\cos\varphi}, \\ \varrho_2 &= N = -\frac{(\lambda\sin\varphi)_v}{\cos\varphi} \end{aligned} \tag{28}$$

wird. Für $\mu = 0$ wird $\varrho_1 = 0$, und *die erste Brennfläche ist in diesem Falle* eine *Guichardsche Evolventenfläche der gegebenen Voßschen Fläche*, die sich aus dieser durch die Quadratur

$$\lambda = \int (-p\,du + q\cos\varphi\,dv) \tag{29}$$

herleitet.

6. *Die zu einer Kugel gehörigen Guichardschen Kongruenzen.* Es war bereits früher dargelegt, daß eine Kugel auf unendlich viele Weisen als Guichardsche Fläche aufgefaßt werden kann. In der Tat, wenn $\xi(u, v)$ auf der Einheitskugel (diese sei, um einen unwesentlichen Faktor zu vermeiden, als Ausgangsfläche gewählt) ein äquidistantes System ist:

$$(d\xi\, d\xi) = du^2 - 2\cos\varphi\, du\, dv + dv^2,$$

so bilden die Pole der sphärischen Tangenten je einer Schar dieses Systems ein orthogonales Kurvennetz (ζ) bzw. (ζ') auf der Kugel, dessen zum Kugelradius $O\xi$ parallele Tangenten je ein Guichardsches Strahlensystem bestimmen. Für die Annahme $x = \zeta$ gelten sämtliche Gleichungen aus Nr. **4**, wobei

$$2\varrho = -\varphi_v \tag{30}$$

zu setzen ist. Daß $\varrho = k\varphi_u$ eine Lösung der Gleichung des Problems bedeutet, ist bereits von Guichard bemerkt worden, trotzdem scheint diese geometrische Deutung nicht ohne selbständiges Interesse zu sein.

Während die erste Brennfläche der Guichardschen Kongruenz die Einheitskugel ζ ist, wird die zweite Brennfläche durch die Gleichung

$$x' = \zeta - \varphi_v \xi$$

gekennzeichnet. Da die Tangenten der v-Kurven auf dieser Fläche alle die feste Kugel ζ berühren, so sind diese Kurven nach bekannten Sätzen der Kurventheorie[8]) geodätische Linien auf Kegelflächen, deren Spitzen im Nullpunkt zusammenfallen. Die hier auftretenden Flächen sind also dadurch gekennzeichnet, daß *ihre Krümmungslinien der einen Schar auf konzentrischen Kegeln geodätisch liegen.* Die zweite Schar von Krümmungslinien besteht sodann aus Evolventen von sphärischen Kurven.

Ein besonderes Interesse verdient der Fall, daß *beide Brennflächen der Kongruenz aus Kugeln bestehen.* Ein jedes Strahlensystem, dessen Geraden zwei Kugeln berühren, ist ein Guichardsches, und die Bestimmung ihrer abwickelbaren Flächen hat bereits Guichard auf elliptische Funktionen zurückgeführt. Geometrisch kennzeichnet sich ein solches System — das natürlich in mannigfacher Weise explizit angegeben werden kann — besonders einfach. Die Kongruenz hat rotatorischen Charakter; sie kann beispielsweise erzeugt werden, wenn man eine ihrer Torsen um die Zentrale der beiden Brennpunktkugeln rotieren läßt. Da nun die Erzeugenden der Torse alle eine feste Kugel berühren, ist ihre Gratlinie eine Kegelgeodätische, die aber selbst auf einer zweiten Kugel liegt. Mithin ergibt sich:

Die Bestimmung der abwickelbaren Flächen einer Kongruenz, deren Brennflächen zwei Kugeln sind, kommt auf das Problem der sphärischen Kegelgeodätischen hinaus. Die Kegelgeodätischen auf der Kugel scheinen bisher noch nicht genauer untersucht worden zu sein[9]), und auch hier seien nur einige der für das vorliegende Problem bemerkenswerten Eigenschaften zusammengestellt. Geht man von den für Kurven auf der Einheitskugel grundlegenden Formeln aus, die bereits von Serret[10]) angegeben wurden,

$$x = -l \sin\sigma + \lambda \cos\sigma, \tag{31}$$

in denen l die Hauptnormale, λ die Binormale und σ den Schmiegungswinkel bedeutet, so wird der Radius der ersten Krümmung

$$\varrho = \sin\sigma. \tag{32}$$

Die natürliche Gleichung der Kegelgeodätischen ist

$$\frac{\tau}{k} = \frac{s}{a},$$

[8]) Schell, Theorie der Kurven, 3. Aufl. 1914, S. 188.

[9]) Die sonst ziemlich erschöpfende Darstellung von J. Rühlemann, Über sphärische Kurven, Diss. Halle 1917, erwähnt sie nicht.

[10]) Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure. Journ. de Math. **16** (1851).

so daß

$$a \sin\sigma \, d\sigma = s \, ds ,$$

oder

$$2a(\cos\sigma_0 - \cos\sigma) = s^2 \tag{33}$$

als zweite natürliche Gleichung der Beziehung (32) zur Seite zu stellen ist. Die endlichen Gleichungen der Kurve ergeben sich durch Quadraturen. Zu diesem Zwecke gehe man von einer beliebigen sphärischen Kurve

$$\begin{aligned} x &= -l\sin\sigma + \lambda\cos\sigma , \\ y &= -m\sin\sigma + \mu\cos\sigma , \\ z &= -n\sin\sigma + \nu\cos\sigma \end{aligned} \tag{34}$$

aus. (Zur Durchführung der Rechnung bedarf man hier wie immer der Koordinatendarstellung.) Sie besitzt eine Evolvente, deren Tangenten die Kugel, auf der sie liegt, berühren, und deren Gleichungen

$$x_1 = \frac{\lambda}{\cos\sigma}, \qquad y_1 = \frac{\mu}{\cos\sigma}, \qquad z_1 = \frac{\nu}{\cos\sigma} \tag{35}$$

lauten. Diese Evolvente ist stets eine geodätische Linie auf dem Polarkegel der Kurve (x, y, z), und die Lösung des Problems ist geliefert, wenn man (λ, μ, ν) so bestimmt hat, daß $(x_1 y_1 z_1)$ eine sphärische Kurve ist. Zur Vereinfachung der Rechnung kann man den Mittelpunkt dieser zweiten Kugel auf der z-Achse im Abstande c vom Nullpunkt annehmen; dann soll also

$$x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - c)^2 = b^2$$

sein. Es kommt also darauf an, drei Funktionen λ, μ, ν so zu bestimmen, daß die Gleichungen

$$\begin{gathered} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 , \\ \lambda^2 + \mu^2 + (\nu - c\cos\sigma)^2 = b^2\cos^2\sigma , \\ d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2 = d\sigma^2 \end{gathered}$$

erfüllt sind. Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2c\cos\sigma} + \frac{c^2 - b^2}{2c}\cos\sigma , \\ \lambda &= \sqrt{1-\nu^2}\cos\vartheta , \\ \mu &= \sqrt{1-\nu^2}\sin\vartheta , \end{aligned} \tag{36}$$

wobei ϑ durch die Quadratur

$$d\vartheta = \frac{d\sigma}{1-\nu^2}\sqrt{1-\nu^2-\nu'^2} \tag{37}$$

dargestellt wird.

Hannover, 9. Oktober 1923.

(Eingegangen am 14. Oktober 1923.)

Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion.

Von

F. und R. Nevanlinna in Helsingfors.

1. Im folgenden werden wir eine in einer früheren Arbeit[1]) entwickelte allgemeine funktionentheoretische Methode zur Untersuchung der komplexen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$$

verwenden.

Falls, wie üblich, $N(T)$ die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion innerhalb des Rechteckes $0 < \sigma < 1,\ 0 < t < T$ $(s = \sigma + it)$ bezeichnet, so ist gemäß der v. Mangoldtschen Formel

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + R(T), \tag{1}$$

wo

$$R(T) = O(\log T). \tag{1}'$$

Den einfachsten Beweis dieser Formel verdankt man R. Backlund[2]), welcher insbesondere die in (1)′ enthaltene Abschätzung des Restgliedes $R(T)$, die Hauptschwierigkeit der ganzen Herleitung, in eleganter Weise erledigt hat.

Ob (1)′ die richtige Größenordnung des Restgliedes $R(T)$ zum Ausdruck bringt, ist eine noch unentschiedene Frage; um so größeres Interesse hat daher ein von Cramér[3]) gefundenes Resultat, wonach für jedes positive ε

$$\int_0^T R(t)\,dt = \frac{7}{8}T + O(T^\varepsilon).$$

---

[1]) Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, Acta Soc. Scient. Fennicae **50**, Nr. 5 (1922).

[2]) Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion. Dissertation, Helsingfors 1916, sowie eine gleichbenannte Abhandlung in Acta Mathematica **41**.

[3]) Studien über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, Math. Zeitschr. **4** (1919), S. 104–130.

Diese Beziehung wurde später von Littlewood[4]) auf

$$\int_0^T R(t)\,dt = \frac{7}{8}T + O(\log T) \tag{2}$$

verschärft.

Wir werden im folgenden zeigen, daß

$$\int_0^T \frac{N(t)}{t}\,dt = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{\pi} + \frac{7}{8}\log T + \varkappa + O\left(\frac{\log T}{T}\right), \tag{3}$$

wo $\varkappa$ eine Konstante ist, deren Wert angegeben werden kann. Diese Beziehung wird direkt, d. h. ohne Anwendung der v. Mangoldtschen Formel hergeleitet und liefert fast unmittelbar einen neuen Beweis dieser Formel. Aus der Vergleichung der Beziehungen (1) und (3) ergibt sich die asymptotische Formel

$$\int_0^T \frac{R(t)}{t}\,dt = \frac{7}{8}\log T + \varkappa + O\left(\frac{\log T}{T}\right). \tag{4}$$

Von den Beziehungen (2) und (4) ist keine eine Folge der anderen; aus (2) ergibt sich nur

$$\int_0^T \frac{R(t)}{t}\,dt = \frac{7}{8}\log T + O(1),$$

während man umgekehrt aus (4) nicht mehr als

$$\int_0^T R(t)\,dt = \frac{7}{8}T + O(\log^2 T)$$

entnehmen kann.

Am Ende dieses Aufsatzes geben wir einen einfachen und direkten Beweis der Gleichung (2).

2. Wir machen den Anfang mit einer kurzen Zusammenstellung der im folgenden gebrauchten funktionentheoretischen Formeln und Ungleichungen.

Falls $f(s)$ innerhalb und auf dem Rande Γ eines Gebietes G regulär ist und innerhalb G die Nullstellen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ besitzt, und ferner $g(s, s_0)$ die Greensche Funktion des Gebietes G mit dem Pol in s_0 bezeichnet;

[4]) Researches in the theory of the Riemann ζ-function, Proc. London Math. Soc. **20** (1922) (Records etc., p. XXII–XXVIII). In dieser Mitteilung wird u. a. die Beziehung (2) ohne Beweis gegeben.

so gilt für jedes von den Nullstellen a_μ verschiedene s_0 innerhalb G die Formel

$$(5) \qquad \log|f(s_0)| = -\sum_1^m g(s_0, a_\mu) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \log|f(s)|\frac{\partial}{\partial n} g(s, s_0)\, dl,$$

wo $\frac{\partial}{\partial n}$ die nach der inneren Randnormale genommene Ableitung und dl das Bogenelement der Randkurve Γ bezeichnet. Da $g > 0$, folgt hieraus, daß für jedes s_0 innerhalb G die Ungleichung

$$\log|f(s_0)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \log|f(s)|\frac{\partial}{\partial n} g(s, s_0)\, dl$$

besteht.

Falls allgemein $\overset{+}{\log} a$ die Zahl $\log a$ oder 0 bezeichnet, je nachdem $a \geqq 1$ oder $0 \leqq a < 1$ ist, so kann die obige Ungleichung mit Benutzung dieser Bezeichnung auch

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \overset{+}{\log}\frac{1}{|f(s)|}\frac{\partial}{\partial n} g(s, s_0)\, dl \leqq -\log|f(s_0)| + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \overset{+}{\log}|f(s)|\frac{\partial}{\partial n} g(s, s_0)\, dl$$

geschrieben werden. Andererseits ist

$$\int_\Gamma \Big|\log|f(s)|\Big|\frac{\partial}{\partial n} g(s, s_0)\, dl$$

$$= \int_\Gamma \overset{+}{\log}|f(s)|\frac{\partial}{\partial n} g(s, s_0)\, dl + \int_\Gamma \overset{+}{\log}\frac{1}{|f(s)|}\frac{\partial}{\partial n} g(s, s_0)\, dl,$$

und demnach

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \Big|\log|f(s)|\Big|\frac{\partial}{\partial n} g(s, s_0)\, dl \leqq -\log|f(s_0)| + \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \overset{+}{\log}|f(s)|\frac{\partial}{\partial n} g(s, s_0)\, dl.$$

Man hat aber, da $\frac{\partial g}{\partial n} > 0$,

$$\int_\Gamma \overset{+}{\log}|f(s)|\frac{\partial}{\partial n} g(s, s_0)\, dl \leqq \overset{+}{\log} M_\Gamma \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n} g(s, s_0)\, dl = 2\pi \overset{+}{\log} M_\Gamma,$$

wo M_Γ den Maximalmodul der Funktion $f(s)$ auf der Randkurve Γ bezeichnet, und wir erhalten somit schließlich die Ungleichung

$$(6) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \Big|\log|f(s)|\Big|\frac{\partial}{\partial n} g(s, s_0)\, dl \leqq \overset{+}{\log}\frac{1}{|f(s_0)|} + 2\overset{+}{\log} M_\Gamma.$$

Ist insbesondere das oben mit G bezeichnete Gebiet ein um den Nullpunkt mit dem Radius ϱ gelegter Kreis, so geht (5) über in die „Poisson-Jensensche“ Formel

$$\log|f(s_0)| =$$

$$-\sum_{|a_\mu|<\varrho}\log\left|\frac{\varrho^2-\bar{a}_\mu s_0}{\varrho(s_0-a_\mu)}\right|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\frac{\varrho^2-r^2}{\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos(\vartheta-\varphi)}d\vartheta,$$

wo $s_0=re^{i\varphi}$ und $\bar{a}_\mu$ die zu a_μ konjugierte Zahl bezeichnet. Für $s_0=0$ geht hieraus als Spezialfall der Jensensche Satz

$$\log|f(0)| = -\sum_{|a_\mu|<\varrho}\log\frac{\varrho}{|a_\mu|}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\,d\vartheta$$

hervor, den wir im folgenden in der Form

$$\int_0^{\varrho}\frac{n(r)}{r}dr = -\log|f(0)|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\,d\vartheta \tag{7}$$

benutzen werden; hierbei bezeichnet $n(r)$ die Anzahl der Nullstellen der Funktion $f(s)$ innerhalb des Kreises $|s|=r$.

Schließlich erinnern wir an folgende Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion. Setzt man

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \tag{8}$$

so ist $\xi(s)$ eine ganze Funktion, deren Nullstellen mit den komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ zusammenfallen; sie genügt der Funktionalgleichung

$$\xi(1-s)=\xi(s).$$

Da $\xi(s)$ auf der reellen Achse reell ist, hat sie konjugierte Werte in Punkten, die symmetrisch zur reellen Achse liegen; folglich muß sie gemäß der Funktionalgleichung auch in Punkten, die symmetrisch zu der Gerade $\sigma=\frac{1}{2}$ sind, konjugierte Werte annehmen.

Schreibt man

$$\zeta(s)=\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\omega(s),$$

so ist für $\sigma\geqq 2$

$$|\omega(s)|\leqq\sum_2^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}<\frac{1}{2^\sigma}+\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^\sigma}=\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\cdot 2^{-\sigma}\leqq 3\cdot 2^{-\sigma}\leqq\frac{3}{4},$$

und demnach

$$\left|\log|\zeta(s)|\right|\leqq|\log\zeta(s)|\leqq\sum_1^{\infty}\frac{|\omega|^n}{n}<\sum_1^{\infty}|\omega|^n=\frac{|\omega|}{1-|\omega|} \tag{9}$$

$$\leqq 4|\omega|\leqq 12\cdot 2^{-\sigma}\leqq 3.$$

Schließlich besteht bekanntlich für $|t| \geqq t_0 > 0$ und gleichmäßig in jedem endlichen Intervall $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ die Beziehung

$$|\zeta(\sigma + it)| = O(|t|^c), \tag{10}$$

wo c eine nur von σ_1 und σ_2 abhängige Konstante bezeichnet.

3. Nach diesen Vorbereitungen gehen wir an die Herleitung der Beziehung (3). Hierbei benutzen wir den Jensenschen Satz in der Form (7), wobei $f(s) = \xi(\frac{1}{2} + s)$ angenommen werden soll. Da die gesamte Nullstellenanzahl dieser Funktion innerhalb des Kreises $|s| = r$ gleich $2N(r)$ ist, so wird, bei Beachtung der oben erwähnten Symmetrieeigenschaft der Funktion $\xi(s)$

$$\int_0^T \frac{N(t)}{t}\, dt = -\frac{1}{2}\log\left|\xi\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left|\xi\left(\frac{1}{2} + Te^{i\vartheta}\right)\right| d\vartheta.$$

Nun ergibt sich aus der Definition (8) der Funktion $\xi(s)$ mit Hilfe der Stirlingschen Formel die für $|\arg s| \leqq \Theta < \pi$ gültige Entwicklung

$$\log\xi\left(\frac{1}{2} + s\right) = -\log 2 + \log\left(s^2 - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{s}{2} + \frac{1}{4}\right)\log\pi + \log\sqrt{2\pi}$$
$$+ \left(\frac{s}{2} - \frac{1}{4}\right)\log\frac{s}{2} - \frac{s}{2} + \log\zeta\left(\frac{1}{2} + s\right) + O\left(\frac{1}{s}\right),$$

woraus folgt

$$\log\left|\xi\left(\frac{1}{2} + Te^{i\vartheta}\right)\right| = \frac{T}{2}\log\frac{T}{2}\cos\vartheta - \frac{T}{2}\vartheta\sin\vartheta - \frac{T}{2}(1 + \log\pi)\cos\vartheta$$
$$+ \frac{7}{4}\log T + \frac{1}{4}\log\frac{\pi}{2} + \log\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + Te^{i\vartheta}\right)\right| + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Wird dies oben eingeführt, so erhält man

$$\int_0^T \frac{N(t)}{t}\, dt = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{\pi} + \frac{7}{8}\log T + \varkappa + \varrho(T), \tag{11}$$

wo

$$\varkappa = -\frac{1}{2}\log\left|\xi\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \frac{1}{8}\log\frac{\pi}{2}$$

und

$$\varrho(T) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + Te^{i\vartheta}\right)\right| d\vartheta + O\left(\frac{1}{T}\right). \tag{11}'$$

Es gilt nunmehr zu zeigen, daß

$$\varrho(T) = O\left(\frac{\log T}{T}\right), \tag{12}$$

wozu gemäß (11)′ notwendig und hinreichend ist, daß

$$(12)' \qquad J(T) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + Te^{i\vartheta}\right)\right| d\vartheta = O\left(\frac{\log T}{T}\right).$$

4. Sei ϑ_0 eine positive Konstante $< \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta' = \arccos\frac{3}{2T}$; für genügend große Werte von T ist dann $0 < \vartheta_0 < \vartheta' < \frac{\pi}{2}$ und wir können das Integral $J(T)$ den drei Intervallen $(0, \vartheta_0)$, $(\vartheta_0, \vartheta')$ und $\left(\vartheta', \frac{\pi}{2}\right)$ entsprechend in drei Teile $J_1(T)$, $J_2(T)$ und $J_3(T)$ zerlegen.

Zur Abschätzung von $J_1(T)$ und $J_2(T)$ bemerke man, daß für $0 \leqq \vartheta \leqq \vartheta'$ der reelle Teil von $\frac{1}{2} + Te^{i\vartheta} \geqq \frac{1}{2} + T\cos\vartheta' = 2$ ist, und somit gemäß (9)

$$\left|\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + Te^{i\vartheta}\right)\right|\right| < 12 \cdot 2^{-\frac{1}{2} - T\cos\vartheta} < 12\, e^{-T\log 2\cos\vartheta}.$$

Folglich ist

$$|J_1(T)| \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^{\vartheta_0}\left|\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + Te^{i\vartheta}\right)\right|\right| d\vartheta < \frac{12\vartheta_0}{\pi}\, e^{-T\log 2\cos\vartheta_0},$$

also

$$(a) \qquad J_1(T) = o\left(\frac{1}{T}\right).$$

Ferner hat man

$$|J_2(T)| \leqq \frac{1}{\pi}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta'}\left|\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + Te^{i\vartheta}\right)\right|\right| d\vartheta < \frac{12}{\pi}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta'} e^{-T\log 2\cos\vartheta}\, d\vartheta$$

$$< \frac{12}{\pi T\log 2\sin\vartheta_0}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta'}\frac{d}{d\vartheta}\left(e^{-T\log 2\cos\vartheta}\right) d\vartheta < \frac{12\, e^{-T\log 2\cos\vartheta'}}{\pi T\log 2\sin\vartheta_0} = \frac{12\, e^{-\frac{3}{2}\log 2}}{\pi T\log 2\sin\vartheta_0},$$

mithin

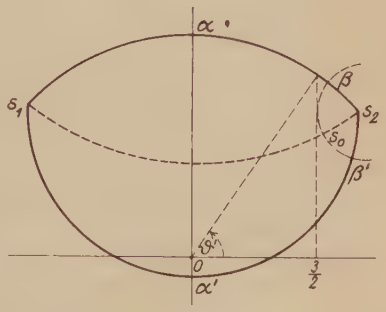
$$(b) \qquad J_2(T) = O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Es erübrigt noch das dritte Integral

$$J_3(T) = \frac{1}{\pi}\int_{\vartheta'}^{\frac{\pi}{2}}\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + Te^{i\vartheta}\right)\right| d\vartheta$$

abzuschätzen. Sei in der nebenstehenden Figur $s_1 = -2 + i\sqrt{T^2 - 4}$, $s_2 = 2 + i\sqrt{T^2 - 4}$, $\alpha = iT$ und $\alpha' = i\left(\sqrt{T^2 - 4} - 2\right)$. Wir bezeichnen mit Γ das von dem Kreisbogen $s_1\alpha s_2$ und dem Halbkreis $s_1\alpha' s_2$ zu-

sammengesetzte Kreisbogenzweieck und mit s_0 den innerhalb Γ fallenden Schnittpunkt der in der Figur punktierten Kreise, deren einer die Winkel von Γ in s_1 und s_2 halbiert, während der andere der konjugierten von s_1 und s_2 definierten Steinerschen Kreisschar angehört und die Gerade $\sigma = \frac{1}{2}$ in dem Punkt $\frac{1}{2} + i\sqrt{T^2 - 4}$ berührt; die Schnittpunkte des letzteren Kreises mit den Kreisbogen $s_1 \alpha s_2$ und $s_1 \alpha' s_2$ seien bzw. β und β'. Sei schließlich $g(s, s_0)$ die Greensche Funktion des Zweiecks Γ mit dem Pol in s_0. Dann hat die nach der inneren Randnormale genommene Ableitung $\frac{\partial}{\partial n} g(s, s_0)$ auf dem Bogen $\alpha\beta$



(der ja den Integrationsweg $|s| = T$, $\vartheta' \leqq \arg s \leqq \frac{\pi}{2}$ von $J_3(T)$ umfaßt) ein positives Minimum $m(T)$, das für jedes $T \geqq 0$ oberhalb einer festen positiven Zahl m_0 liegt. Dies ist aus allgemeinen potentialtheoretischen Gründen klar und kann auch direkt verifiziert werden[5]).

---

[5]) Dies kann z. B. in folgender Weise geschehen: Wir bilden das von Γ eingeschlossene Kreiszweieck auf den Einheitskreis der z-Ebene derart ab, daß s_0 in den Nullpunkt übergeht. Diese Abbildung wird durch Zusammensetzung der Transformationen

$$x = e^{-i\mu\frac{\pi}{2}} \left(\frac{s - s_1}{s - s_2}\right)^{\mu}, \qquad z = \frac{x - x_0}{x - \bar{x}_0}$$

bewerkstelligt, wobei $\frac{\pi}{\mu}$ die Größe der Eckwinkel in Γ bezeichnet und $x_0 = 7^{\mu} i$ der Bildpunkt von s_0 in der x-Ebene ist. Andererseits ist, wenn h die zu der Greenschen Funktion $g(s, s_0)$ konjugierte Funktion bezeichnet,

$$\log z = -g - ih.$$

Folglich wird auf dem Rande von Γ $\left|\frac{z'}{z}\right| = \left|\frac{\partial g}{\partial n} + i\frac{\partial h}{\partial n}\right| = \left|\frac{\partial g}{\partial n} + i\frac{\partial g}{\partial l}\right|$ und somit, da hier $g \equiv 0$, somit $\frac{\partial g}{\partial l} = 0$, und $|z| = 1$ ist,

$$\frac{\partial g}{\partial n} = |z'(s)| = \left|\frac{dz}{dx}\right| \cdot \left|\frac{dx}{ds}\right|,$$

oder, wenn man die Rechnung ausführt,

$$\frac{\partial}{\partial n} g(s, s_0) = \left|\frac{x_0 - \bar{x}_0}{(x - \bar{x}_0)^2}\right| \cdot \mu \left|\frac{s - s_1}{s - s_2}\right|^{\mu - 1} \left|\frac{s_1 - s_2}{(s - s_2)^2}\right|.$$

Es ist $|x_0 - \bar{x}_0| = 2 \cdot 7^{\mu}$ und $|s_1 - s_2| = 4$; ferner ist für jedes $T \geqq 0$ und jeden Punkt s des Bogens $\alpha\beta$

$$|x - \bar{x}_0|^2 \leqq 2 \cdot 7^{2\mu}, \qquad \left|\frac{s - s_1}{s - s_2}\right| \geqq 1, \qquad |s - s_2|^2 \leqq 8.$$

(Fortsetzung der Fußnote 5 auf der nächsten Seite.)

Nach diesen Vorbereitungen ergibt nunmehr die Ungleichung (6) für für $J_3(T)$ folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}|J_3(T)| &\leqq \frac{1}{\pi}\int_{\vartheta'}^{\frac{\pi}{2}} \left|\log\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+Te^{i\vartheta}\right)\right|\right| d\vartheta < \frac{1}{\pi T}\int_{\alpha\beta}\left|\log\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+Te^{i\vartheta}\right)\right|\right| dl \\ &< \frac{1}{m_0\pi T}\int_{\alpha\beta}\left|\log\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+Te^{i\vartheta}\right)\right|\right|\frac{\partial}{\partial n}g(s,s_0)\,dl \\ &< \frac{1}{m_0\pi T}\int_{\Gamma}\left|\log\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+Te^{i\vartheta}\right)\right|\right|\frac{\partial}{\partial n}g(s,s_0)\,dl \\ &< \frac{2}{m_0 T}\left\{\overset{+}{\log}\frac{1}{\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+s_0\right)\right|}+2\overset{+}{\log}M_\Gamma\right\},\end{aligned}$$

wo M_Γ den Maximalmodul von $\zeta(\frac{1}{2}+s)$ auf Γ bezeichnet. Nun ist, da für jedes T der reelle Teil von $s_0+\frac{1}{2}\geqq 2$, gemäß (9)

$$\overset{+}{\log}\frac{1}{\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+s_0\right)\right|}\leqq\left|\log\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+s_0\right)\right|\right|<3,$$

und nach (10)

$$\overset{+}{\log}M_\Gamma = O(\log T).$$

Folglich ist gemäß der obigen Ungleichung

$$(c)\qquad J_3(T)=O\left(\frac{\log T}{T}\right).$$

Aus den Beziehungen (a), (b) und (c) ergibt sich schließlich (12)′, womit zugleich die Beziehung (12) bewiesen ist.

5. Die oben bewiesene Beziehung

$$(3)\qquad \int_0^T\frac{N(t)}{t}\,dt=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{\pi}+\frac{7}{8}\log T+\varkappa+O\left(\frac{\log T}{T}\right)$$

ist offenbar weit genauer als die v. Mangoldtsche Formel; sie liefert ja für einen einfachen Mittelwert der Anzahlsfunktion $N(t)$, welcher von derselben Größenordnung wie diese ist, einen asymptotischen Ausdruck mit einem Restglied, das gegen Null konvergiert wie $\frac{\log T}{T}$, während man über

Da $1\leqq\mu<2$ ist, erhalten wir somit schließlich die auf dem genannten Bogen für jedes $T\geqq 0$ gültige Abschätzung

$$\frac{\partial}{\partial n}g(s,s_0)\geqq\frac{\mu}{2}7^{-\mu}>\frac{1}{49}.$$

das Restglied der v. Mangoldtschen Formel nur weiß, daß es höchstens wie $\log T$ unendlich wird. In der Tat läßt sich auch, wie wir sogleich sehen werden, die v. Mangoldtsche Formel aus (3) leicht folgern, während man umgekehrt aus dieser nur auf

$$\int_0^T \frac{N(t)}{t}\,dt = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{\pi} + O(\log^2 T)$$

schließen kann.

Um aus (3) die v. Mangoldtsche Formel zu erhalten, bemerke man, daß

$$(T-1)\int_{T-1}^{T}\frac{N(t)}{t}\,dt < N(T) < (T+1)\int_{T}^{T+1}\frac{N(t)}{t}\,dt.$$

Nun werden die beiden Integrale gemäß (3) durch den Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} + O\left(\frac{\log T}{T}\right)$$

asymptotisch dargestellt, woraus folgt, daß in der Tat

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

sein muß. Hiermit ist die v. Mangoldtsche Formel auf einem neuen Wege gewonnen.

Durch Vergleichung der Beziehnng (3) mit der sich aus (1) ergebenden

$$\int_0^T \frac{N(t)}{t}\,dt = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{\pi} + \int_0^T \frac{R(t)}{t}\,dt$$

findet man die in der einleitenden Nummer erwähnte Beziehung

$$\int_0^T \frac{R(t)}{t}\,dt - \frac{7}{8}\log T + \varkappa + O\left(\frac{\log T}{T}\right). \tag{4}$$

6. Schließlich wollen wir nach der oben angewandten Methode einen Beweis der Cramér-Littlewoodschen Beziehung

$$\int_0^T R(t)\,dt = \frac{7}{8}T + O(\log T) \tag{2}$$

geben.

Falls t von den Ordinaten der Nullstellen von $\zeta(s)$ verschieden ist, so hat man nach Backlund[6])

$$R(t) = \frac{7}{8} + \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) + r(t),$$

wo

$$\text{(a)} \qquad r(t) = O\left(\frac{1}{t}\right),$$

und $\arg \zeta(\frac{1}{2} + it)$ denjenigen Zweig von $\arg \zeta(s)$ bedeutet, zu dem man gelangt, wenn man von einem Punkt $\sigma_0 > 1$ der reellen Achse mit $\arg \zeta(\sigma_0) = 0$ ausgehend den gebrochenen Linienzug $\sigma_0 \to \sigma_0 + it \to \frac{1}{2} + it$ stetig verfolgt. Beachtet man, daß $\frac{\partial}{\partial \sigma} \arg \zeta(\sigma + it) = -\frac{\partial}{\partial t} \log |\zeta(\sigma + it)|$, so kann hiernach

$$R(t) = \frac{7}{8} + \frac{1}{\pi} \arg \zeta(\sigma_0 + it) + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\sigma_0} \frac{\partial}{\partial t} \log |\zeta(\sigma + it)| \, d\sigma + r(t)$$

geschrieben werden.

Sei nun $T > 0$ eine „nullstellenfreie" Ordinate und $0 < t_1 < t_2 \ldots < t_{n-1} < T$ die Ordinaten der im Gebiet $\sigma \geqq \frac{1}{2}$, $0 < t < T$ liegenden Nullstellen von $\zeta(s)$. Dann folgt aus Obigem für $\varepsilon > 0$

$$\int_{t_\nu + \varepsilon}^{t_{\nu+1} - \varepsilon} R(t)\, dt = \frac{7}{8}(t_{\nu+1} - t_\nu - 2\varepsilon) + \frac{1}{\pi} \int_{t_\nu + \varepsilon}^{t_{\nu+1} - \varepsilon} \arg \zeta(\sigma_0 + it)\, dt$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\sigma_0} \{\log |\zeta(\sigma + i(t_{\nu+1} - \varepsilon))| - \log |\zeta(\sigma + i(t_\nu + \varepsilon))|\}\, d\sigma + \int_{t_\nu + \varepsilon}^{t_{\nu+1} - \varepsilon} r(t)\, dt.$$

Diese Gleichung besteht offenbar auch an der Grenze für $\varepsilon \to 0$; werden die so entstehenden n Gleichungen ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$; $t_0 = 0$, $t_n = T$) addiert, so ergibt sich die Formel

$$\int_0^T R(t)\, dt = \frac{7}{8} T + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\sigma_0} \log |\zeta(\sigma + iT)|\, d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{\sigma_0} \log |\zeta(\sigma)|\, d\sigma$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^T \arg \zeta(\sigma_0 + it)\, dt + \int_0^T r(t)\, dt,$$

die offenbar nicht nur für ein nullstellenfreies, sondern für jedes T gilt. Wir lassen jetzt σ_0 bei festem T ins Unendliche wachsen. Da gemäß (9) für $\sigma \geqq 2$ und jedes t sowohl der reelle als der rein imaginäre Teil von

[6]) Loc. cit.

$\log \zeta(\sigma + it)$ numerisch kleiner ist als $12 \cdot 2^{-\sigma}$, so verschwindet hierbei das vierte Glied rechts, während das dritte gegen einen endlichen Grenzwert k konvergiert; das letzte Glied ist von σ_0 unabhängig und wir erhalten also

$$(13) \qquad \int_0^T R(t)\,dt = \frac{7}{8}T + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \log|\zeta(\sigma + iT)|\,d\sigma - k + \int_0^T r(t)\,dt.$$

Hier ist nun infolge von (a)

$$(b) \qquad \int_0^T r(t)\,dt = O(\log T).$$

Um das zweite Glied rechts abzuschätzen, zerlegen wir das Integral in den Punkt $\sigma = 2$ in zwei Teile J_1 und J_2. Nach (9) ist

$$J_2 \leqq \frac{1}{\pi}\int_2^{\infty} |\log|\zeta(\sigma + iT)||\,d\sigma < \frac{12}{\pi}\int_2^{\infty} 2^{-\sigma}\,d\sigma = \frac{3}{\pi \log 2} = O(1),$$

und für J_1 erhält man

$$J_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{2} \log|\zeta(\sigma + iT)|\,d\sigma = O(\log T);$$

dies zeigt man nach der oben bei Abschätzung des analogen Integrals J_3 angewandten Methode (wobei die Einzelheiten der Betrachtung im vorliegenden Falle sich sogar etwas einfacher gestalten). Folglich ist

$$(c) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \log|\zeta(\sigma + iT)|\,d\sigma = O(\log T).$$

Aus den Beziehungen (13), (b) und (c) ergibt sich schließlich

$$\int_0^T R(t)\,dt = \frac{7}{8}T + O(\log T),$$

w. z. b. w.

(Eingegangen am 10. November 1923.)

Eine Ungleichheit für die Eilinien.

Von

Tadahiko Kubota in Sendai (Japan).

1. Bei der Untersuchung über Eilinien sind die folgenden Größen von fundamentaler Bedeutung: Der Flächeninhalt F, die Kurvenlänge L, der Durchmesser D, d. h. der größte Wert des Abstandes paralleler Stützgeraden und die Dicke Δ, d. h. der kleinste Wert des Abstandes paralleler Stützgeraden. Diesen Größen fügen wir den größten und kleinsten Wert R, r des Krümmungsradius hinzu, wenn die Krümmung stetig ist.

Die Ungleichheiten zwischen zweien von den Größen F, L, D, Δ, R, r wurden von Rosenthal, Szász, Bieberbach, Hurwitz, Blaschke und Pál untersucht[1]). Einige Ungleichheiten zwischen dreien der Größen habe ich in den „Science Reports of the Tôhoku Imp. University XII, 2“ untersucht.

Hier möchte ich eine neue Ungleichheit mitteilen, die mir besonders interessant erscheint.

2. In der genannten Arbeit habe ich bewiesen

$$\frac{4(\pi-2)}{\sqrt{3}} F \geqq (L-2D)D,$$

wobei die Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn die Eilinie eine doppelte Geradenstrecke ist.

Die Frage, ob die Konstante $\frac{4(\pi-2)}{\sqrt{3}}$ durch eine kleinere ersetzt werden kann, habe ich offengelassen. Hier möchte ich diese Lücke mit Hilfe des folgenden Satzes ausfüllen:

[1]) A. Rosenthal und O. Szász, Eine Extremaleigenschaft der Kurven konstanter Breite, Jahresberichte der D. M. V. **25** (1916); L. Bieberbach, Über eine Extremaleigenschaft des Kreises, Jahresberichte der D. M. V. **24** (1915); A. Hurwitz, Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier, Annales de l'Ecole normale sup. **19** (1912); W. Blaschke, Sphärische Kurven konstanter Breite, Leipziger Berichte (1915); G. Pál, Ein Minimumproblem für Ovale, Math. Ann. **83** (1921).

Zwischen dem Flächeninhalt F, dem Umfang L und dem Durchmesser D besteht die Ungleichheitsbeziehung

$$4F \geqq (L-2D)D\sqrt{3}, \tag{1}$$

wobei die Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn die Eilinie eine doppelte Geradenstrecke oder ein reguläres Dreieck ist.

Zum Beweise betrachten wir den folgenden Hilfssatz, den ich in der genannten Arbeit bewiesen habe:

Wenn D und L bei einer Eilinie derartig gegeben sind, daß

$$2D \leqq L \leqq 3D, \tag{2}$$

so wird der Flächeninhalt der Eilinie ein Minimum, wenn die Eilinie ein gleichschenkliges Dreieck mit zwei Schenkeln $= D$ und der Basis $= L - 2D$ ist.

Daraus folgt die Beziehung

$$F \geqq \frac{L-2D}{2}\sqrt{D^2 - \left(\frac{L-2D}{2}\right)^2},$$

wenn L und D der Ungleichheit (2) genügen. Die Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn die Eilinie ein gleichschenkliges Dreieck mit den Schenkeln $= D$ und der Basis $= L - 2D$ ist.

Folglich ist

$$F \geqq \frac{L-2D}{4}\sqrt{4LD - L^2}.$$

Nun wird $4LD - L^2$ am kleinsten, wenn unter der Bedingung (2)

$$L = 3D$$

ist, d. h.

$$4F \geqq (L-2D)\sqrt{3}D\,(4D-3D) \geqq (L-2D)D\sqrt{3}.$$

Somit gilt die Beziehung (1), wenn L und D der Relation (2) genügen. Hierbei gilt die Gleichheit dann und nur dann, wenn die Eilinie eine doppelte Geradenstrecke oder ein gleichschenkliges Dreieck ist.

In meiner letzten Arbeit über Eilinien, die bald in den „Science Reports", Vol. 13, erscheinen wird, habe ich den folgenden Satz bewiesen:

Wenn L und D bei einer Eilinie die Ungleichheit

$$3D \leqq L \leqq \pi D \tag{3}$$

erfüllen, und man ein Viereck mit drei Seiten und einer Diagonale $= D$, und der vierten Seite $= L - 3D$ konstruiert, so wird der Flächeninhalt dieses Vierecks kleiner als der der gegebenen Eilinie.

Der Flächeninhalt dieses Vierecks ist

$$\frac{\sqrt{3}}{4}D^2 + \frac{L-3D}{2}\sqrt{D^2 - \left(\frac{L-3D}{2}\right)^2}.$$

Nun setze man

$$L - 3D = D\eta, \qquad \text{also} \qquad L = (3+\eta)D.$$

Dann ist

$$F \geqq \frac{\sqrt{3}}{4} D^2 + \frac{L-3D}{2} \sqrt{D^2 - \left(\frac{L-3D}{2}\right)^2},$$

d. h.

$$4F \geqq \sqrt{3} D^2 + \eta \sqrt{4-\eta^2}\, D^2.$$

Andererseits ist

$$(L-2D) D \sqrt{3} = (3+\eta-2) D^2 \sqrt{3} = (1+\eta) D^2 \sqrt{3}.$$

Folglich gilt

$$4F - (L-2D) D \sqrt{3} \geqq (\sqrt{4-\eta^2} - \sqrt{3}) \eta D^2.$$

Nun ist aber

$$0 < \eta < \pi - 3 = 0{,}14159\ldots, \qquad \text{also} \qquad \sqrt{4-\eta^2} > \sqrt{3}.$$

Folglich ist

$$\eta (\sqrt{4-\eta^2} - \sqrt{3}) D^2 > 0.$$

Somit gilt (1) immer dann, wenn L und D der Relation (3) genügen.

Damit ist die Ungleichheit (1) für eine beliebige Eilinie bewiesen, wobei die Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn die Eilinie eine doppelte Geradenstrecke oder ein reguläres Dreieck ist.

3. Folgerung I. Die Ungleichheit von T. Hayashi[2])

$$4F \geqq (L-2D) D$$

ist in meiner zu Anfang von 2. angegebenen Ungleichheit und natürlich auch in (1) vollständig enthalten.

Die Konstante $\frac{4}{\sqrt{3}}$ *in der mit* (1) *gleichbedeutenden Ungleichheit*

$$\frac{4}{\sqrt{3}} F \geqq (L-2D) D \tag{4}$$

kann nicht durch eine kleinere ersetzt werden, da die Gleichheit gilt, wenn die Eilinie ein reguläres Dreieck ist.

Folgerung II. *Zwischen* L, F, D *bei beliebigen Eilinien besteht die Ungleichheit*

$$L^2 - \frac{4\pi}{\sqrt{3}} F \leqq 2\pi D^2,$$

wobei die Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn die Eilinie ein Punkt ist.

Denn aus $L \leqq \pi D$ und (4) folgt

$$L^2 - \frac{4\pi}{\sqrt{3}} F \leqq \pi \left(L D - \frac{4}{\sqrt{3}} F \right) \leqq \pi \cdot 2 D^2.$$

Sendai, den 1. Oktober 1922.

[2]) The extremal chords of an oval, Tôhoku Math. Journ. 22, p. 387–393.

(Eingegangen am 13. November 1923.)

Zur Theorie der Eisensteinschen Gleichungen.

Von

Öystein Ore in Kristiania.

Wenn in einem Polynome

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \tag{1}$$

die ganzen rationalen Koeffizienten a_i alle durch eine rationale Primzahl p teilbar sind, soll $f(x)$ ein *Eisensteinsches Polynom* genannt werden. Die Eisensteinschen Polynome spielen wegen ihrer verschiedenen interessanten Eigenschaften für mehrere Gebiete der Algebra eine Rolle, besonders wo es sich um die Aufstellung von Gleichungsbeispielen mit gewissen Eigenschaften handelt, so z. B. irreduzible und primitive Gleichungen, Gleichungen ohne Affekt, und weiter in der Körpertheorie für die Aufstellung von Körpern, bei denen die Primzahl p als gemeinsamer, außerwesentlicher Teiler vorkommt u. a.

Durch meine Untersuchungen über algebraische Körper[1]) habe ich verschiedene Resultate gewonnen, welche, auf Eisensteinsche Gleichungen angewandt, mehrere weitergehende Sätze über diese Gleichungen geben. Diese neuen Sätze, welche ich hier entwickeln werde, enthalten mehrere frühere Sätze als Spezialfälle.

§ 1.

Es sei $f(x)$ durch (1) definiert, wobei jedoch nicht vorausgesetzt zu werden braucht, daß alle Koeffizienten a_i durch p teilbar sind. Man nehme an, daß a_i allgemein durch p^{α_i} genau teilbar sei, und leite daraus die Zahlenpaare

$$(0, 0),\ (1, \alpha_1),\ \ldots,\ (n, \alpha_n) \tag{2}$$

[1]) Ö. Ore, Zur Theorie der algebraischen Körper, Acta math. **44**.

ab. Diese Zahlenpaare kann man weiter als Gitterpunkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem deuten, wobei man jedoch, wenn $a_i = 0$ ist, keinen entsprechenden Gitterpunkt (i, α_i) hat. Zu diesem Gitterpunkte kann man dann das entsprechende Newtonsche Polygon S konstruieren, das also im Punkte $(0, 0)$ anfängt und im Punkte (n, α_n) seinen Endpunkt hat, indem vorausgesetzt wird, daß man $a_n \neq 0$ hat. Alle Gitterpunkte (2) liegen oberhalb oder auf S.

Es seien weiter

$$S_1, S_2, \ldots, S_k$$

die Seiten von S und bzw.

$$l_1, l_2, \ldots, l_k$$

und

$$h_1, h_2, \ldots, h_k$$

die Projektionen dieser Seiten auf die X-Achse bzw. Y-Achse, wobei also die Relationen

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_k = n, \qquad h_1 + h_2 + \ldots + h_k = \alpha_n$$

bestehen. Da die Zahlen h_i und l_i ganz rational sind, gibt es einen größten gemeinsamen Faktor e_i derart, daß

$$l_i = e_i \lambda_i, \qquad h_i = e_i \varkappa_i,$$

wo λ_i zu $\varkappa_i$ relativ prim ist. Wenn die erste Seite S_1 mit der X-Achse zusammenfällt, so ist $h_1 = \varkappa_1 = 0$, und in diesem Falle wird $\lambda_1 = 1$ gesetzt.

Dumas[2]) hat über diese Polygone den folgenden Fundamentalsatz bewiesen:

Das Polygon eines Produktes ist aus den Polygonen der Faktoren zusammengesetzt und zwar so, daß man die Seiten nach steigender Neigung ordnet.

Aus diesem Satze folgt einfach der *Dumassche Irreduzibilitätssatz*[3]):

$f(x)$ kann nur dann im rationalen Bereiche einen Faktor vom Grade m haben, wenn m in der Form

$$m = \sum_{i=1}^{k} t_i \lambda_i \tag{3}$$

darstellbar ist, wobei t_i eine der Zahlen $0, 1, \ldots, e_i$ bezeichnet.

[2]) Dumas, Sur quelques cas d'irréductibilité des polynomes à coefficients rationnels, Journ. de Math. (6) 2, S. 217.

[3]) Dumas, a. a. O. [2]), S. 237.

Aus diesem Satze folgen die Sätze von Eisenstein[4]), Netto[5]), Königsberger[6]), Perron[7]) und Bauer[8]) als einfache Spezialfälle.

§ 2.

Es soll nun gezeigt werden, wie es möglich ist, eine noch mehr bestimmte Form als (3) für die Grade der Faktoren von $f(x)$ anzugeben.

Wie man leicht sieht, ist in (1) die Summe der Glieder, welche durch Punkte auf der ersten Seite S_1 von S abgebildet werden, von der Form

$$x^n + b_{\lambda_1} p^{\varkappa_1} x^{n-\lambda_1} + b_{2\lambda_1} p^{2\varkappa_1} x^{n-2\lambda_2} + \ldots + b_{l_1} p^{h_1} x^{n-l_1},$$

wo

$$b_{i\lambda_1} p^{i\varkappa_1} = a_{i\lambda_1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, e_1)$$

und b_{l_1} nicht durch p teilbar ist. Ebenso sind die entsprechenden Glieder der zweiten Seite

$$b_{l_1} p^{h_1} x^{n-l_1} + b_{l_1+\lambda_2} p^{h_1+\varkappa_2} x^{n-l_1-\lambda_2} + b_{l_1+2\lambda_2} p^{h_1+2\varkappa_2} x^{n-l_1-2\lambda_2} + \ldots + b_{l_1+l_2} p^{h_1+h_2} x^{n-l_1-l_2}$$

und allgemein für die i-te Seite

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & b_{l_1+\ldots+l_{i-1}} p^{h_1+\ldots+h_{i-1}} x^{n-l_1-\ldots-l_{i-1}} \\ & + b_{l_1+\ldots+l_{i-1}+\lambda_i} p^{h_1+\ldots+h_{i-1}+\varkappa_i} x^{n-l_1-\ldots-l_{i-1}-\lambda_i} \\ & + b_{l_1+\ldots+l_{i-1}+2\lambda_i} p^{h_1+\ldots+h_{i-1}+2\varkappa_i} x^{n-l_1-\ldots-l_{i-1}-2\lambda_i} + \ldots \\ & + b_{l_1+\ldots+l_i} p^{h_1+\ldots+h_i} x^{n-l_1-\ldots-l_i}, \end{aligned} \right.$$

wo

$$b_{l_1+\ldots+l_{i-1}+j\lambda_i} p^{h_1+\ldots+h_{i-1}+j\varkappa_i} = a_{l_1+\ldots+l_{i-1}+j\lambda_i}$$

und $b_{l_1+\ldots+l_i}$ nicht durch p teilbar ist. Setzt man hier

$$b_{l_1+\ldots+l_{i-1}+j\lambda_i} = c_{i,j},$$

so geht (4) in

$$p^{h_1+\ldots+h_{i-1}} x^{n-l_1-\ldots-l_i} (c_{i,0} x^{e_i\lambda_i} + c_{i,1} p^{\varkappa_i} x^{(e_i-1)\lambda_i} + \ldots + c_{i,e_i} p^{e_i\varkappa_i})$$

über. Da aber weiter

$$c_{i,0} = b_{l_1+\ldots+l_{i-1}} \not\equiv 0 \pmod{p}$$

---

[4]) G. Eisenstein, Über die Irreduktibilität und einige andere Eigenschaften der Gleichung, von welcher die Teilung der ganzen Lemniskate abhängt, Journ. für Math. **39**, S. 166.

[5]) E. Netto, Über die Irreduktibilität ganzzahliger Funktionen, Math. Ann. **48**, S. 81.

[6]) L. Königsberger, Über den Eisensteinschen Satz von der Irreduktibilität algebraischer Gleichungen, Journ. für Math. **115**, S. 69.

[7]) O. Perron, Über eine Anwendung der Idealtheorie auf die Frage nach der Irreduzibilität algebraischer Gleichungen, Math. Ann. **60**, S. 448.

[8]) M. Bauer, Elementare Irreduzibilitätsuntersuchungen, Journ. f. Math. **134**, S. 19.

ist, kann man eine Zahl A_i so bestimmen, daß

$$A_i c_{i,0} \equiv 1 \pmod{p}$$

ist. Setzt man dann

$$d_{i,j} = A_i c_{i,j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, e_i),$$
$$d_{i,0} = 1,$$

so soll das Polynom

$$f_i(x) = x^{e_i \lambda_i} + d_{i,1} p^{\varkappa_i} x^{(e_i-1)\lambda_i} + d_{i,2} p^{2\varkappa_i} x^{(e_i-2)\lambda_i} + \ldots + d_{i,e_i} p^{e_i \varkappa_i}$$

mit dem geradlinigen Polygone S_i der *Faktor der i-ten Seite* heißen. Aus $f_i(x)$ leitet man weiter das Polynom

$$F_i(y) = y^{e_i} + d_{i,1} y^{e_i - 1} + \ldots + d_{i,e_i}$$

ab, das *das zugeordnete Polynom der i-ten Seite* genannt werden soll. Wie man leicht sieht, besteht die Identität

$$p^{e_i \varkappa_i} F_i\left(\frac{x^{\lambda_i}}{p^{\varkappa_i}}\right) = f_i(x).$$

Die Bedeutung dieser Begriffe wird nun aus den folgenden Untersuchungen klar. Wenn zwei Polynome $f(x)$ und $g(x)$ dasselbe Polygon S besitzen, so soll die Kongruenz

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{S}$$

bezeichnen, daß in der Differenz $f(x) - g(x)$ alle repräsentierenden Punkte oberhalb S liegen.

Man zeigt dann leicht[9]):

Es ist

$$f(x) \equiv \prod_{i=1}^{k} f_i(x) \pmod{S}. \tag{5}$$

Weiter sage ich, daß ein Polynom $f_i(x)$ für sein geradliniges Polygon S_i *reduzibel* ist, wenn eine Zerlegung

$$f_i(x) \equiv g(x) h(x) \pmod{S_i} \tag{6}$$

besteht. Hier kann man wegen des Hauptsatzes über Polygone annehmen, daß die Faktoren $g(x)$ und $h(x)$ die Form

$$g(x) = x^{t_i \lambda_i} + g_1 p^{\varkappa_i} x^{(t_i-1)\lambda_i} + \ldots + g_{t_i} p^{t_i \varkappa_i}$$
$$h(x) = x^{s_i \lambda_i} + h_1 p^{\varkappa_i} x^{(s_i-1)\lambda_i} + \ldots + h_{s_i} p^{s_i \varkappa_i} \qquad (s_i + t_i = e_i),$$

haben und dies zeigt, daß, wenn eine Zerlegung (6) bestehen soll, auch eine entsprechende Zerlegung des zugeordneten Polynoms

$$F_i(y) \equiv G(y) H(y) \pmod{p}$$

[9]) Die Richtigkeit dieser Kongruenz folgt einfach als Spezialfall der Kongruenz (12), Kap. 2 in meiner oben erwähnten Arbeit.

gelten muß, wo

$$G(y) = y^{t_i} + g_1 y^{t_i-1} + \ldots + g_{t_i},$$

$$H(y) = y^{s_i} + h_1 y^{t_i-1} + \ldots + h_{s_i}$$

ist. Umgekehrt folgt aus einer solchen Zerlegung von $F_i(y) \pmod p$ auch die entsprechende Zerlegung von $f_i(x) \pmod{S_i}$.

Wenn daher

$$F_i(y) \equiv F_1^{(i)}(y)\, F_2^{(i)}(y) \ldots F_{t_i}^{(i)}(y) \pmod p \tag{7}$$

die Primfunktionenzerlegung des zugeordneten Polynoms der i-ten Seite ist, wo also

$$F_j^{(i)}(y) = y^{\varepsilon_j^{(i)}} + d_{1,j}^{(i)} y^{\varepsilon_j^{(i)}-1} + \ldots + d_{t_{i,j}}^{(i)},$$

so folgt daraus auch für $f_i(x)$ die eindeutige Zerlegung von $f_i(x)$ in irreduziblen Faktoren $\pmod{S_i}$

$$f_i(x) \equiv f_1^{(i)}(x)\, f_2^{(i)}(x) \ldots f_{t_i}^{(i)}(x) \pmod{S_i},$$

wo

$$f_j^{(i)}(x) = x^{\varepsilon_j^{(i)}\lambda_i} + d_{1,j}^{(i)} p^{\varkappa_i} x^{(\varepsilon_j^{(i)}-1)\lambda_i} + \ldots + d_{t_{i,j}}^{(i)} p^{\varepsilon_j^{(i)}\varkappa_i} \tag{8}$$

ist. Daraus folgt nach (5):

Es besteht für $f(x)$ die eindeutige Zerlegung in irreduziblen Faktoren $\pmod S$

$$f(x) \equiv \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{t_i} f_j^{(i)}(x) \pmod S. \tag{9}$$

Aus der Zerlegung (9) folgt nun einfach der Irreduzibilitätssatz:

Satz 1. *$f(x)$ kann im rationalen Bereiche nur dann einen Faktor vom m-ten Grade haben, wenn m die Form*

$$m = \sum_{i,j} \varepsilon_j^{(i)} \lambda_i \tag{10}$$

hat, wobei in dieser Summe eine beliebige Anzahl von Gliedern mitgerechnet werden darf. Hier bedeuten die $\varepsilon_j^{(i)}$ die Grade der irreduziblen Faktoren in der Zerlegung (7) der zugeordneten Polynome.

§ 3.

Aus der Gleichung (10) folgt unmittelbar der Dumassche Satz. Einen noch allgemeineren Satz als Satz 1 habe ich in meiner oben erwähnten Arbeit gegeben; dieser Satz gestattet eine Anwendung auf beliebig gegebene Polynome.

Durch Anwendung des Satzes 1 kann man eine Reihe von spezielleren

Irreduzibilitätssätzen ableiten. So hat z. B. ein Eisensteinsches Polynom mit einem geradlinigen Polygone S die Form

$$f(x) = x^n + a_1 p^{\overline{\frac{r}{n}}} x^{n-1} + a_2 p^{\overline{\frac{2r}{n}}} x^{n-2} + \ldots + a_n p^r, \tag{11}$$

wobei a_n nicht durch p teilbar ist. Das Symbol $\overline{i}$ bedeutet die kleinste ganze Zahl, welche $\geqq i$ ist. Wenn hier r zu n relativ prim ist, wird $f(x)$ irreduzibel. Wenn aber e der größte gemeinsame Faktor von r und n ist, also

$$n = e\lambda, \quad r = e\varkappa, \tag{12}$$

so ist

$$x^{e\lambda} + a_\lambda p^\varkappa x^{(e-1)\lambda} + a_{2\lambda} p^{2\varkappa} x^{(e-2)\lambda} + \ldots + a_n p^{e\varkappa}$$

die Gesamtheit der Glieder, welche durch Punkte auf S abgebildet sind. Das zugeordnete Polynom ist daher

$$F(y) = y^e + a_\lambda y^{e-1} + a_{2\lambda} y^{e-2} + \ldots + a_n$$

und $f(x)$ kann dann nach Satz 1 nur einen Faktor vom Grade m haben, wenn $m = \varepsilon\lambda$ ist, wobei ε der Grad eines Faktors von $F(y) \pmod p$ bedeutet. Wenn $F(y) \pmod p$ irreduzibel ist, wird auch $f(x)$ im rationalen Gebiete irreduzibel. Durch Anwendung der Kriterien über irreduzible Kongruenzen für einen Primzahlmodul auf $F(y)$ kann man entsprechend eine Reihe von Irreduzibilitätskriterien für Polynome von der Form (11) gewinnen.

Ich gebe hier nur eine spezielle Anwendung. Man verdankt Königsberger[10]) den Satz:

Wenn in

$$f(x) = x^n + a_1 p^{\left\lfloor \frac{r}{n} \right\rfloor + 1} x^{n-1} + a_2 p^{\left\lfloor \frac{2r}{n} \right\rfloor + 1} x^{n-2} + \ldots + a_n p^r \tag{13}$$

a_n nicht durch p teilbar und r zu n relativ prim ist, muß $f(x)$ irreduzibel sein.

Wenn aber in (13) nicht mehr vorausgesetzt wird, daß r zu n relativ prim sein soll, sondern daß die Gleichungen (12) bestehen sollen, so wird das zugeordnete Polynom

$$F(y) = y^e + a_n$$

und $f(x)$ kann in diesem Falle nur Faktoren vom Grade m haben, wenn $m = \varepsilon\lambda$ ist, wobei ε der Grad eines Faktors von $y^e + a_n \pmod p$ bedeutet, und wenn $F(y) \pmod p$ irreduzibel ist, wird auch $f(x)$ im rationalen Bereiche irreduzibel. Dies trifft z. B. sicher ein, wenn $e = 2$ oder $e = 3$ ist, und $-a_n$ quadratischer bzw. kubischer Nichtrest $(\mathrm{mod}\ p)$ ist.

[10]) L. Königsberger, a. a. O. [6]), S. 69.

§ 4.

Wenn man nun im folgenden das Polynom $f(x)$ als irreduzibel voraussetzt, so wird durch die Gleichung $f(\vartheta) = 0$ ein algebraischer Körper $P(\vartheta)$ n-ten Grades definiert. Wie ich weiter in meiner oben zitierten Arbeit gezeigt habe, folgt dann eine Idealzerlegung von p in $P(\vartheta)$, welche die Form

$$p = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \dots \mathfrak{P}_k^{\lambda_k} \tag{14}$$

hat, worin alle Ideale $\mathfrak{P}_i$ zueinander relativ prim sind. Weiter hat auch die Zahl ϑ die Zerlegung

$$\vartheta = \mathfrak{P}_1^{\varkappa_1} \mathfrak{P}_2^{\varkappa_2} \dots \mathfrak{P}_k^{\varkappa_k} \mathfrak{Q},$$

wo das Ideal $\mathfrak{Q}$ zu p relativ prim ist. Aus diesen Resultaten folgen einfach die Ergebnisse von Bauer[11]) über Körper, welche durch Eisensteinsche Gleichungen definiert sind.

Nimmt man aber nun an, daß in der Zerlegung (9) von $f(x)$ alle Faktoren $f_j^{(i)}(x)$ voneinander verschieden sind, d. h. in der Zerlegung (7) des zugeordneten Polynoms sollen immer alle Faktoren (mod p) verschieden sein, so habe ich das Polynom $f(x)$ *regulär*[12]) genannt. In diesem Falle kann man die Primidealzerlegung von p vollständig angeben, indem dann ein Ideal $\mathfrak{P}_i$ in (14) die Primidealzerlegung

$$\mathfrak{P}_i = \mathfrak{p}_1^{(i)} \mathfrak{p}_2^{(i)} \dots \mathfrak{p}_{t_i}^{(i)} \tag{15}$$

besitzt, wo $N\mathfrak{p}_j^{(i)} = p^{\varepsilon_j^{(i)}}$ ist.

Mittels dieser Resultate kann man sehr einfach die sogenannte *Dedekindsche Aufgabe* lösen:

Es sei ein System von ganzen rationalen und positiven Zahlen

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r,$$
$$m_1, m_2, \dots, m_r$$

beliebig gegeben, so daß

$$\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \dots + \lambda_r m_r = n$$

ist. Es soll gezeigt werden, daß man immer solche Körper $P(\vartheta)$ n-ten Grades konstruieren kann, daß in $P(\vartheta)$ die Primzahl p die Primidealzerlegung

$$p = \mathfrak{p}_1^{\lambda_1} \mathfrak{p}_2^{\lambda_2} \dots \mathfrak{p}_r^{\lambda_r}, \quad N\mathfrak{p}_i = p^{m_i}$$

besitzt.

Man bestimmt zu jedem Exponenten λ_i eine Primfunktion (mod p)

$$F_i(y) = y^{m_i} + a_{i,1}\, y^{m_i - 1} + \dots + a_{i,m_i}.$$

[11]) M. Bauer, Zur allgemeinen Theorie der algebraischen Größen, Journ. für Math. **132**, S. 21.

[12]) Ö. Ore, Weitere Untersuchungen zur Theorie der algebraischen Körper, Acta math. **45**.

Diese Primfunktionen können im allgemeinen voneinander verschieden gewählt werden. Nur wenn die Anzahl der Primideale vom Grade m_i größer als die Anzahl der verschiedenen Primfunktionen (mod p) vom Grade m_i ist, müssen von den Primfunktionen $F_i(y)$ einige einander gleich gewählt werden, und in diesem Falle muß bekanntlich die Primzahl p ein gemeinsamer, außerwesentlicher Diskriminantenteiler des Körpers $P(\vartheta)$ sein.

Weiter bestimmt man eine Reihe von ganzen rationalen, positiven Zahlen

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r,$$

so daß immer $\varkappa_i$ zu λ_i relativ prim ist, und weiter soll

$$\frac{\varkappa_1}{\lambda_1} < \frac{\varkappa_2}{\lambda_2} < \ldots < \frac{\varkappa_r}{\lambda_r}$$

sein. Aus $F_i(y)$ leitet man dann das Polynom

$$f_i(x) = x^{m_i\lambda_i} + a_{i,1}\, p^{\varkappa_i} x^{(m_i-1)\lambda_i} + \ldots + a_{i,m_i} p^{m_i\varkappa_i}$$

ab, das ein geradliniges Polygon S_i besitzt und für dieses Polygon irreduzibel ist. Das Polynom

$$\Pi(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_r(x)$$

wird daher vom Grade n und sein Polygon S ist aus den Seiten S_i zusammengesetzt. Daraus folgt weiter, wenn man die ganze rationale Zahl α durch

$$\alpha > m_1\varkappa_1 + m_2\varkappa_2 + \ldots + m_r\varkappa_r$$

bestimmt, daß auch das Polynom

$$f(x) = \Pi(x) + p^\alpha M(x)$$

das Polygon S besitzt, wenn das Polynom $M(x)$ beliebig von einem Grade kleiner als n gewählt wird. Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ irreduzibel ist, bestimmt sie offenbar nach den früheren Bemerkungen einen Körper mit den gewünschten Eigenschaften. Die Irreduzibilität von $f(x)$ kann man aber dadurch sichern, daß man in $M(x)$ die noch unbestimmten Koeffizienten so bestimmt, daß in $\Pi(x) + p^\alpha M(x)$ alle Koeffizienten außer dem ersten 1 durch eine von p verschiedene Primzahl q teilbar werden, die letzte aber nicht durch q^2.

§ 5.

Man kann aus den obenstehenden Resultaten auch allgemeine Primitivitätskriterien für Eisensteinsche Gleichungen ableiten.

Wenn nämlich die irreduzible Gleichung $f(x) = 0$ imprimitiv sein soll, so gibt es einen solchen Unterkörper $Q(\theta)$ vom Körper $P(\vartheta)$, welche durch $f(\vartheta)$ definiert ist, daß $f(x)$ in $Q(\theta)$ reduzibel wird und einen Faktor

vom Grade m enthält. Die Zahl m habe ich eine *Imprimitivitätszahl* von $f(x)$ genannt, und wenn l der Grad von $Q(\theta)$ ist, so hat man $n = lm$.

In meiner Arbeit „Über Gleichungen mit primitiven Gruppen“[13]) habe ich die Form der möglichen Imprimitivitätszahlen untersucht. Hier möchte ich aber zeigen, wie man für diese Zahlen eine noch schärfere Bestimmung gewinnen und dadurch einige weitere Imprimitivitätssätz ableiten kann.

Es sei

$$p = \mathfrak{q}^u Q \tag{16}$$

eine Idealzerlegung von p in $Q(\theta)$, wobei $\mathfrak{q}$ ein Primideal und Q ein durch $\mathfrak{q}$ nicht teilbares Ideal bezeichnet. Dann wird also ein Koeffizient a_i in $f(x)$ durch $\mathfrak{q}^{u\alpha_i}$ genau teilbar. Zu den Zahlenpaaren $(i, u\alpha_i)$ kann man weiter das zugehörige Newtonsche Polygon S' konstruieren, und die Form des Polygons S' wird einfach aus dem Polygone S abgeleitet, indem S' die X-Achseprojektionen

$$l_1, l_2, \ldots, l_k$$

und die Y-Achseprojektionen

$$uh_1, uh_2, \ldots, uh_k$$

haben muß.

Da sich der Dumassche Irreduzibilitätssatz, wie man leicht bemerkt, auf den Fall eines beliebigen Zahlkörpers übertragen läßt, so kann $f(x)$ in $Q(\theta)$ nur dann einen Faktor vom Grade m haben, wenn m von der Form

$$m = t_1 \frac{l_1}{g_1} + t_2 \frac{l_2}{g_2} + \ldots + t_k \frac{l_k}{g_k}$$

ist, wobei g_i der größte gemeinsame Faktor von l_i und uh_i bedeutet, und t_i eine der Zahlen $0, 1, \ldots, g_i$ bezeichnet. Hier kann man aber $g_i = e_i f_i$ setzen, wo f_i der größte gemeinsame Faktor von λ_i und u ist, so daß man auch

$$m = t_1 \frac{\lambda_1}{f_1} + t_2 \frac{\lambda_2}{f_2} + \ldots + t_k \frac{\lambda_k}{f_k} \tag{17}$$

setzen kann, wobei t_i eine der Zahlen $0, 1, \ldots, e_i f_i$ ist.

Die Gleichung (17) gilt allgemein für den Grad eines Faktors von $f(x)$ in einem beliebigen Zahlkörper $Q(\theta)$, worin für p eine Idealzerlegung (16) stattfindet.

Wenn aber $Q(\theta)$ ein Unterkörper von $P(\vartheta)$ ist, so muß m ein Teiler von n sein. Weiter wird im allgemeinen das Primideal $\mathfrak{q}$ in $P(\vartheta)$ zerlegbar, also etwa

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \ldots \mathfrak{p}_t^{e_t}$$

---

[13]) Ö. Ore, Über Gleichungen mit primitiven Gruppen, Math. Zeitschr. **19**, S. 276.

und daher auch nach (16)

$$p = \mathfrak{p}_1^{e_1 u} \mathfrak{p}_2^{e_2 u} \dots \mathfrak{p}_t^{e_t u} Q',$$

wo das Ideal Q' in $P(\vartheta)$ durch keines der Primideale $\mathfrak{p}_i$ teilbar ist.

Wird nun vorausgesetzt, daß im folgenden $f(x)$ regulär ist, so folgt nach § 4, daß in der Primidealzerlegung von p in $P(\vartheta)$ nur die Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ vorkommen. Hieraus folgt, daß in diesem Falle immer Relationen von der Form $e_j u = \lambda_i$ bestehen müssen, d. h. u muß immer ein Teiler einer der Zahlen λ_i sein. Bildet man nun die Zerlegung (16) für alle Primidealteiler $\mathfrak{q}$ von p in $Q(\theta)$, so folgt weiter, daß es für jede Zahl λ_i einen entsprechenden Exponenten u geben muß, so daß λ_i durch u teilbar ist.

Man hat daher den Satz:

Satz 2. *Wenn die reguläre, irreduzible Eisensteinsche Gleichung* $f(x) = 0$ *imprimitiv sein soll, so sind nur Imprimitivitätszahlen* m *von der Form*

$$m = \sum_{i=1}^{k} t_i \frac{\lambda_i}{f_i} \tag{18}$$

möglich, wo f_i *der größte gemeinsame Teiler von* f_i *und* u *bedeutet,* t_i *bezeichnet eine der Zahlen* $0, 1, \dots, e_i f_i$. *Die Zahl* u *ist hier ein Teiler einer der Zahlen* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, *und für jede Zahl* λ_j *gibt es einen solchen Teiler* u, *daß eine Relation von der Form* (18) *besteht. Weiter ist* m *ein Teiler von* n.

Aus diesem Satze kann man eine Reihe von spezielleren Sätzen ableiten. Die Forderung, daß $f(x)$ regulär sein soll, ist insbesondere dann erfüllt, wenn immer h_i zu l_i relativ prim ist, d. h. wenn $l_i = \lambda_i$, $h_i = \varkappa_i$, $e_i = 1$ für alle i ist. In diesem Falle sind nämlich alle zugeordneten Polynome der Seiten vom ersten Grade und folglich $(\mathrm{mod}\ p)$ irreduzibel. Unter dieser Voraussetzung kommt nach Satz 2, daß nur Imprimitivitätszahlen von der Form

$$m = \sum_{i=1}^{k} t_i \frac{l_i}{f_i} \tag{19}$$

möglich sind, wobei also f_i den größten gemeinsamen Teiler von l_i und u angibt, u ist ein Teiler einer der Zahlen l_i und t_i bezeichnet eine der Zahlen $0, 1, \dots, f_i$.

Ich behandle nun speziell den Fall $k = 2$, das Polygon S soll aus zwei Seiten mit den Projektionen l_1 und l_2 auf die X-Achse, h_1 und h_2

auf die Y-Achse bestehen. Weiter soll l_1 zu h_1 und l_2 zu h_2 relativ prim sein. Dann folgt aus (19) für eine Primitivitätszahl

$$m = t_1 \frac{l_1}{f_1} + t_2 \frac{l_2}{f_2}. \tag{20}$$

Setzt man weiter voraus, daß die Zahlen l_1 und l_2 zueinander relativ prim sind, so ist auch n zu diesen Zahlen relativ prim, weil die Relation $l_1 + l_2 = n$ besteht. Es soll nun nachgewiesen werden, daß die Gleichung $f(x) = 0$ unter dieser Voraussetzung primitiv sein muß.

Da die folgenden Untersuchungen von der Reihenfolge der Seiten unabhängig ist, so kann man, ohne der Allgemeinheit zu schaden, $l_2 > \frac{n}{2} > l_1$ voraussetzen. Wenn nun erstens angenommen wird, daß die Zahl u ein Teiler von l_1 ist, so wird $f_1 = u$, und da l_2 zu l_1 und folglich auch zu u relativ prim ist, so wird $f_2 = 1$. Man hat daher nach (20)

$$m = t_1 \frac{l_1}{u} + t_2 l_2,$$

wo t_1 eine der Zahlen $0, 1, \ldots, u$ und t_2 gleich 0 oder 1 ist. Hier muß aber $t_2 = 0$ sein, sonst würde $m \geqq l_2 \geqq \frac{n}{2}$ werden, was nicht möglich ist. Man hat daher

$$m u = t_1 l_1,$$

und da l_1 zu m relativ prim sein muß, indem diese Zahl ein Teiler von n ist, so hat man $u = l_1$ und daher auch $m = t_1$, d. h. m muß eine der Zahlen $1, 2, \ldots, l_1 - 1$ sein.

Wenn nun u ein Teiler von l_2 ist, folgt wie früher

$$m = t_1 l_1 + t_2 \frac{l_2}{u},$$

wo $u > 1$, $t_1 = 0$ oder $= 1$ ist, und t_2 eine der Zahlen $0, 1, \ldots, u$ bezeichnet. Hier kann nicht $t_1 = 0$ sein, denn daraus folgt

$$m u = t_2 l_2$$

und daher $u = l_2$. Dies ist aber nicht möglich, da dann der Grad von $Q(\theta)$ größer als $\frac{n}{2}$ würde. Man hat daher $t_1 = 1$, also

$$m = l_1 + t_2 \frac{l_2}{u} > l_1,$$

was nach dem eben Bewiesenen nicht möglich ist. $f(x)$ muß also primitiv sein.

Satz 3. *Wenn $f(x)$ ein zweiseitiges Polygon besitzt, wofür l_1 zu h_1, l_2 zu h_2 und l_1 zu l_2 relativ prim ist, so wird die Gleichung $f(x) = 0$ primitiv, wenn sie irreduzibel ist.*

Aus diesem Satze folgt, wenn $l_1 = 1$ oder $l_2 = 1$ gesetzt wird, ein von mir früher bewiesenen Satz[14]). Aus diesem folgt noch spezieller ein Satz von Furtwängler[15]).

Es soll hier auch ein anderer Satz bewiesen werden:

Satz 4. *Wenn $f(x)$ ein Polygon besitzt, wofür immer l_i zu h_i relativ prim ist, und für eine Seite $l_j = q > \frac{n}{2}$ eine Primzahl ist, so muß die Gleichung $f(x) = 0$ primitiv sein.*

Dieser Satz ist unter der Voraussetzung

$$l_1 = \ldots = l_{j-1} = l_{j+1} \ldots = l_k = 1$$

von Bauer[16]) bewiesen worden.

Der Beweis des allgemeinen Satzes ist sehr einfach. Wenn nämlich in $Q(\theta)$

$$p = \mathfrak{q}_1^{u_1} \ldots \mathfrak{q}_t^{u_t}$$

die Primidealzerlegung von p ist, können keine Exponenten u_i durch q teilbar sein, denn daraus würde folgen, daß der Grad von $Q(\theta)$ größer oder gleich $q > \frac{n}{2}$ wurde, was nicht möglich ist. Da aber in der Zerlegung von p in Primideale in $P(\vartheta)$ für ein Primideal der Exponent q vorkommt, so muß es ein Primideal $\mathfrak{q}$ so geben, daß in $P(\vartheta)$

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{p}_s^{e_s}$$

ist, wo eine der Zahlen e_i durch q teilbar ist. Dies ist aber auch nicht möglich, indem der Relativgrad von $P(\vartheta)$ in bezug auf $Q(\theta)$ gleich $\frac{n}{m} \leqq \frac{n}{2}$ ist. Die Gleichung $f(x) = 0$ muß daher primitiv sein.

§ 6.

Nachdem ich so die verschiedenen Untersuchungen über Eisensteinsche Gleichungen behandelt habe, möchte ich zuletzt einige andere Fragestellungen über Eisensteinsche Gleichungen erwähnen, welche verschiedene interessante Ergebnisse liefern. Wenn ein beliebiger algebraischer Zahlkörper $P(\vartheta)$ gegeben ist, so soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen $P(\vartheta)$ einen Unterkörper $Q(\theta)$ enthalten kann, wobei die Zahl θ einer irreduziblen Eisensteinschen Gleichung $f(\theta) = 0$ genügt.

---

[14]) Ö. Ore, a. a. O. [13]).

[15]) P. Furtwängler, Über Kriterien für irreduzible und für primitive Gleichungen, Math. Ann. **85**.

[16]) M. Bauer, Über Gleichungen ohne Affekt, Journ. f. Math. **132**, S. 34.

Wenn ε eine p^{α}-te Einheitswurzel bezeichnet, so genügt bekanntlich $1 - \varepsilon$ einer Eisensteinschen Gleichung, und man kann daher diese Untersuchungen zur Bestimmung der möglichen Einheitswurzeln in einem algebraischen Körper anwenden. Es folgt daraus der folgende Satz, welchen ich in einer noch nicht erschienenen Arbeit (Journ. für Math.) bewiesen habe:

Wenn d die Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers $P(\vartheta)$ ist, so kann $P(\vartheta)$ nur solche Einheitswurzeln ε enthalten, welche der Gleichung

$$\varepsilon^{2d} = 1$$

genügen.

Die Richtigkeit dieses interessanten Satzes kann auch sehr einfach direkt nachgewiesen werden.

(Eingegangen am 15. Dezember 1923.)

Zur Theorie der Dirichletschen Reihen.

Von

Werner Rogosinski in Königsberg.

Ein besonderer Reiz, welchen das Studium der sogenannten allgemeinen Dirichletschen Reihen bietet, besteht in der eigentümlichen Verschiebung ihrer Konvergenzverhältnisse und funktionentheoretischen Eigenschaften gegenüber dem Verhalten der gewöhnlichen Potenzreihen, als deren Verallgemeinerung jene Reihen gelten können, und andererseits wieder in den weitgehenden Analogien zu diesen, welche dennoch überall in ihrer Theorie hervortreten. Der weiteren Beleuchtung dieser Beziehungen will auch die vorliegende Arbeit dienen, welche insbesondere den in der klassischen Potenzreihentheorie grundlegenden Satz über die Lage der Extrema mit der Fülle der wichtigen Folgerungen aus ihm auf Dirichletsche Reihen zu übertragen trachtet. Die bekannten Arbeiten der Herren Lindelöf und Phragmén[1]) über die Verallgemeinerung jenes klassischen Satzes haben diese so naheliegende und wichtige Aufgabe im Prinzip schon gelöst; um so merkwürdiger ist es, daß sie in der bisherigen, doch sonst recht vielseitigen und tiefführenden Literatur über Dirichletsche Reihen kaum berührt, geschweige denn erledigt worden ist.

Es sei eine sonst beliebige reelle λ-Folge

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \ldots \to \infty \tag{1}$$

gegeben und für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n \tag{2}$$

gesetzt.

$$s = \sigma + it \tag{3}$$

[1]) E. Lindelöf und E. Phragmén, Sur une extension d'un principe classique de l'analyse ..., Acta Math. **31** (1908), S. 381–406.

sei eine komplexe Veränderliche. Eine allgemeine, zum gegebenen λ-Typus (1) gehörige Dirichletsche Reihe wird dann formal durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} e^{\lambda_n s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{4}$$

erklärt, wo die

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n \tag{5}$$

beliebige komplexe Größen sind.

In der einschlägigen Literatur[2]) ist die Definition (4) nicht üblich. Man läßt in (1) die Vorschrift $\lambda_0 = 0$ fort und hat gar keine λ_{-n}, also auch keine Vorschrift (2). Für den vorliegenden Zweck ist aber (4) dienlicher, weil es nicht nur die gewöhnlichen Cauchy-Potenzreihen und Polentwicklungen, sondern die allgemeinsten Laurent-Entwicklungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \tag{6}$$

nach der Transformation

$$z = e^{-s} \tag{7}$$

als zum Typus $\lambda_n = n$ gehörig unter sich faßt, mit denen wir unsere Reihen vergleichen wollen.

Die Fassung (4) unserer Definition ist übrigens gegenüber dem in der Literatur Üblichen nicht viel weitgehender. Beachtet man, daß die zweite Summe in (4),

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} e^{\lambda_n s}$$

durch die einfache Transformation s in $-s$ in eine Reihe üblicher Gestalt verwandelt wird, so läßt sich das meiste aus deren Theorie unmittelbar auf (4) übertragen. Indes treten doch mitunter bei der Behandlung eines allgemeinen (4) eigentümliche Schwierigkeiten auf. Andererseits werden wir uns naturgemäß auf den üblichen Typus sehr oft zu beschränken haben.

Die Vorschrift (2) bedeutet offenbar keinerlei Einschränkung; sie ist rein formaler Natur und dient dazu, den Koeffizientenformeln, die in dieser Arbeit auftreten werden, übersichtliche Gestalt zu geben.

[2]) An geschlossenen Darstellungen kommen in Betracht:

A) E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, bei Teubner (1909), Bd. II, 6. Buch, S. 723—882. (Fortan kurz „Handbuch" zitiert.)

B) G. H. Hardy und M. Riesz, The general Theory of Dirichlet's Series, Cambridge Tracts **18** (1915), S. 1—78. („H. R." zitiert.)

C) H. Bohr und H. Cramér, Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie, Encyklopädie der math. Wissenschaften **II. C. 8** (1923), 1. Teil (H. Bohr), S. 724—779. („Enc. Art." zitiert.)

Originalliteratur siehe daselbst; ich nenne nur jeweils den Autor.

Aus den bekannten Elementen der Theorie der Dirichletschen Reihen folgt nun ohne weiteres, daß eine Reihe (4), wenn überhaupt, in einem „Streifen“

$$-\infty \leqq \sigma_B < \sigma < \sigma'_B \leqq \infty \tag{8}$$

konvergiert[3]), der, abgesehen von den beiden Randgeraden $\sigma = \sigma_B$ bzw. $\sigma = \sigma'_B$ (linke bzw. rechte Konvergenzgerade von (4)), wo sich über die Konvergenzverhältnisse ganz allgemein nichts aussagen läßt[4]), das genaue Konvergenzgebiet (den „Konvergenzstreifen“) von (4) darstellt. Die Analogie zu den Reihen (6) nach der Transformation (7) ist ganz offenbar.

Ferner konvergiert (4) gleichmäßig in jedem ganz im Endlichen gelegenen abgeschlossenen Teilgebiete von (8), stellt also eine in (8) reguläre analytische Funktion $f(s)$ dar[5]). Man beachte aber die folgenden wesentlichen Unterschiede gegenüber den speziellen transformierten Laurentreihen (6):

I. (4) braucht nicht im Innern von (8) absolut zu konvergieren[6]).

II. (4) braucht weder in irgendwelchem echten abgeschlossenen Teilstreifen von (8)

$$\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma'_0 \qquad (\sigma_B < \sigma_0;\ \sigma'_0 < \sigma'_B)$$

gleichmäßig zu konvergieren[7]), noch daselbst gleichmäßig beschränkt zu sein[8]).

III. Das durch (4) erklärte Funktionselement $f(s)$ braucht keine Singularitäten auf den Konvergenzgeraden zu besitzen[9]).

Was I. anlangt, so gibt es wieder einen „Streifen absoluter Konvergenz“

$$\sigma_A < \sigma < \sigma'_A \qquad (\sigma_B \leqq \sigma_A;\ \sigma'_A \leqq \sigma'_B), \tag{9}$$

der, abgesehen von den Konvergenzverhältnissen auf den Randgeraden, das genaue Gebiet absoluter Konvergenz für (4) darstellt, wenn es überhaupt ein solches gibt[6]).

Ebenso gibt es bezüglich II. einen „Streifen gleichmäßiger Konvergenz“

$$\sigma_G < \sigma < \sigma'_G \qquad (\sigma_B \leqq \sigma_G \leqq \sigma_A;\ \sigma'_A \leqq \sigma'_G \leqq \sigma'_B), \tag{10}$$

[3]) Handbuch, § 206, S. 724–726 (Jensen). Die Bezeichnungen der „Abszissen“ entnehme ich dem Enc. Art.

[4]) H. R., S. 5.

[5]) Handbuch, § 208, S. 735–736 (Cahen).

[6]) Handbuch, § 206, S. 728–731 (Jensen).

[7]) Handbuch, § 209, S. 737–742 (Dedekind, Cahen, Perron).

[8]) Die transformierte Reihe (6) hat sogar die Periode $2\pi i$.

[9]) H. R., S. 9–10.

der den breitesten „Streifen“ gleichmäßiger Konvergenz von (4) (falls vorhanden) bezeichnet[10]).

Schließlich wird noch (man beachte III.) ein vierter Streifen

$$(11) \qquad -\infty \leqq \sigma_e < \sigma < \sigma'_e \leqq \infty \qquad (\sigma_e \leqq \sigma_B;\ \sigma'_B \leqq \sigma'_e)$$

eine besonders wichtige Rolle spielen. (11) ist der breiteste, (8) enthaltende „Streifen“, innerhalb dessen sich $f(s)$ ausnahmslos regulär verhält, derart, daß in jedem echten abgeschlossenen Teilstreifen von (11)

$$\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma'_0 \qquad (\sigma_e < \sigma_0;\ \sigma'_0 < \sigma'_e)$$

für ein gewisses reelles $k = k(\sigma_0, \sigma'_0)$ mit wachsendem $|t|$ eine gleichmäßige Abschätzung

$$(12) \qquad f(s) = O(|t|^k)$$

gilt. Nach Hardy-Riesz[11]) heißt (11) „Streifen endlicher Ordnung von $f(s)$“. Die Sätze der vorliegenden Arbeit, wie überhaupt diejenigen fast der gesamten bisherigen Theorie, sind in ihrer Gültigkeit auf das Innere dieses Streifens beschränkt, und diese Beschränkung scheint auch im allgemeinen wesentlich zu sein.

Für die in der Literatur üblichen Reihen, bei denen also nur endlich viele $a_{-n} \neq 0$ sind, ist weiterhin

$$\sigma'_A = \sigma'_B = \sigma'_G = \sigma'_e = \infty,$$

so daß die „Streifen“ in „Halbebenen“ ausarten.

Schließlich können auch die Streifen in einzelne Geraden ausarten; jedoch soll insbesondere der Fall $\sigma_B = \sigma'_B$, bei dem also in gewissen Punkten der Geraden $\sigma = \sigma_B$ allein Konvergenz von (4) herrscht, ausdrücklich ausgeschlossen sein. Natürlich wollen wir auch die nirgends konvergenten Reihen (4) nicht betrachten.

Ein Fundament der gesamten Potenzreihentheorie (d. h. aber der Weierstraßschen Funktionentheorie überhaupt) sind die klassischen Sätze über die Lage der Extrema einer durch (6) definierten Funktion $\varphi(z)$ und die wichtigen Folgerungen aus ihnen. Ihre Analoga für die Dirichletschen Reihen sind bisher nicht aufgestellt worden; man hat sich vielmehr bei diesen im wesentlichen mit dem Studium des asymptotischen Verhaltens von $f(s)$ auf Geraden $\sigma = \gamma$ aus (11) begnügt, wozu etwa die Theorie der Lindelöfschen μ-Funktion[12]) vorliegt. Ein durch (4) erklärtes

[10]) Enc. Art., S. 726 (Bohr).

[11]) H. R., S. 14. Die Existenz von (11) ist gewährleistet; vgl. Hilfssatz 1.

[12]) Enc. Art., S. 737. Für ein σ aus (11) versteht man unter $\mu(\sigma)$ die untere Grenze der möglichen Exponenten k in (12) für alle s auf der durch σ bestimmten Geraden.

$f(s)$ braucht ja auf einer solchen Geraden weder gleichmäßig beschränkt noch auch nur etwa einseitig beschränkt zu sein. Es ist aber zweifellos wichtig, gegebenenfalls die Verhältnisse, die durch eine solche Beschränkung bedingt sind, zu untersuchen.

Dies geschieht im § 1 der vorliegenden Arbeit, und zwar im leichten Anschluß an die schon eingangs genannten Lindelöf-Phragménschen Ergebnisse[1]). Es ergeben sich innerhalb (11) die Analoga zu den hauptsächlichsten der oben erwähnten klassischen Potenzreihensätze, von den Folgerungen z. B. eine sinngemäße Übertragung des bekannten Schwarzschen Lemmas[13]) auf Dirichletsche Reihen. Des weiteren erhalten wir ein vollständiges Analogon zu dem bekannten Satze über die Konvexität der Lindelöfschen μ-Funktion[12]), wenn nämlich spezieller $f(s)$ auf einer Geraden $\sigma = \gamma$ aus (11) gleichmäßig beschränkt vorausgesetzt wird. Daß wir uns hier, wie überhaupt, auf Geraden beschränken und nicht allgemeinere Linienzüge aus (11) in unsere Voraussetzungen aufnehmen, ist ganz unwesentlich. Der Leser wird selbst leicht sehen, welche Verallgemeinerungen in dieser Richtung möglich sind; die Geraden entsprechen eben den Kreisen $|z| = \varrho$ bei (6).

Der § 2 ist den Koeffizientenformeln der Entwicklung (4) gewidmet, die im § 3 in Verbindung mit den Ergebnissen des § 1 zu Abschätzungszwecken dienen sollen, aber auch an sich Interesse verdienen dürften. Auch hier ist vieles für unsere Zwecke Bemerkenswertes in der bisherigen Literatur zumindest nicht explizit zu finden.

Aus den bekannten Koeffizientenformeln für die Laurentreihe (6) folgt nach der Transformation (7) unmittelbar das für alle n gültige

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma}^{\gamma + 2\pi i} e^{ns} f(s)\, ds. \tag{13}$$

Hierbei ist γ irgendein σ aus dem zugehörigen Konvergenzstreifen (8) und das Integral etwa geradlinig erstreckt.

Spaltet man in Real- und Imaginärteil

$$f(s) = u(s) + i\, v(s), \tag{14}$$

so wird mit der Bezeichnung (5)

$$u(\gamma + it) \equiv u(\gamma, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)\, e^{-n\gamma} \tag{15}$$

[13]) H. A. Schwarz, Gesammelte math. Abhandl., Bd. II (1890), S. 110–111.

mit den Fourierformeln

$$\alpha_n e^{-n\gamma} + \alpha_{-n} e^{n\gamma} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\gamma, t) \cos nt\, dt,$$

$$\beta_n e^{-n\gamma} - \beta_{-n} e^{n\gamma} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\gamma, t) \sin nt\, dt, \tag{16}$$

aus denen man noch durch Kombination ein bemerkenswertes Gegenstück zu (13), nämlich

$$a_n + \bar{a}_{-n} e^{2n\gamma} = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma}^{\gamma + 2\pi i} e^{ns} u(s)\, ds \tag{17}$$

erhält, wo die überstrichene Größe, wie stets, den konjugiert-komplexen Wert bezeichnet.

Als Ergänzung bereits bekannter, leicht beweisbarer „Limeskoeffizientenformeln“[14]) für die Reihen (4) werde ich formal besonders interessante Seitenstücke zu obigen Formeln im Anschluß an den tiefer gelegenen Cahen-Perronschen Koeffizientensummensatz[15]) ableiten. Hier wird übrigens schon die formale Zweckmäßigkeit der Vorschrift (2) einleuchtend.

Im § 3 werden unter der Voraussetzung, daß $f(s)$ gleichmäßig auf einer Geraden $\sigma = \gamma$ aus (11) beschränkt bzw. einseitig beschränkt ist, aus den gewonnenen Koeffizientenformeln Ungleichungen für die Koeffizienten a_n von (4) gefolgert, die der klassischen Cauchy-Abschätzung bei Potenzreihen bzw. den Ergebnissen der Untersuchungen des Herrn Carathéodory[16]) über einseitig beschränkte Potenzreihen entsprechen. Unter Benutzung der Resultate des § 1 kann dies alles aus den schon erwähnten Limeskoeffizientenformeln fast unmittelbar abgelesen werden, wenn die Reihe (4) von dem in der Literatur üblichen Typus ist. Anderenfalls treten eigentümliche Schwierigkeiten auf, die durch einen besonderen Beweisansatz, der sich auf die tieferen Koeffizientenformeln des § 2 stützt, überwunden werden müssen. Zugleich erhält man damit eine Methode, alle diese Abschätzungen auch unabhängig von den Untersuchungen des § 1 durchzuführen, was auch an sich von Interesse sein dürfte. Als Nebenergebnis dieses Paragraphen läßt sich auch ein schöner

[14]) Handbuch, § 224, Formel des Satzes 35 auf S. 788; vgl. auch Enc. Art. S. 746 (Landau).

[15]) Handbuch, Satz 50 auf S. 832.

[16]) C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen, Math. Ann. 64 (1907), S. 95—115.

Satz des Herrn Bohr[17]) über die Majorante einer Potenzreihe unter gewissen Voraussetzungen auf Dirichletsche Reihen übertragen.

Der Schlußparagraph 4 enthält endlich im direkten Anschluß an einen Satz des Herrn Carlson[18]) Untersuchungen über die absolute Konvergenz der Quadratsumme der Koeffizienten von (4) nebst Folgerungen, die in unseren Problemkreis gehören. Auch hier erfordern die ganz allgemeinen Reihen (4) besondere Überlegungen, und erst eine ähnliche Beweismethode wie im § 3 führt allgemein zum Ziel. Im übrigen haben die Ergebnisse dieses Paragraphen in der Potenzreihentheorie ihre längst bekannten und unschwer beweisbaren Vorbilder.

§ 1.

Es sei $f(s)$ als Dirichletsche Reihe

$$f(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (s=\sigma+it) \tag{4}$$

innerhalb (8) erklärt und besitze (11) als Streifen endlicher Ordnung. Es sei γ aus (11), und auf $\sigma=\gamma$ sei für ein $M>0$

$$|f(s)|\leqq M \tag{18}$$

oder aber wenigstens eine einseitige Beschränkung, etwa

$$\Re(f(s))=u(s)\geqq 0 \tag{19}$$

gleichmäßig erfüllt. Wir untersuchen die Verhältnisse, welche durch eine dieser Beschränkungen für unser $f(s)$ bedingt sind. Natürlich könnte man statt (19) irgendeine andere einseitige Beschränktheit für $f(s)$ voraussetzen; die Resultate dieses Paragraphen gestatten dann eine entsprechende Formulierung.

Außer den in der Einleitung erwähnten Elementen der Theorie der Dirichletschen Reihen benötigen wir noch einige weitere Sätze, deren Beweise an den zitierten Literaturstellen zu finden sind.

Hilfssatz 1[19]). *Es sei* $\sigma_B<\sigma_0<\sigma_0'<\sigma_B'$. *Dann ist mit wachsendem* $|t|$ *gleichmäßig in* $\sigma_0\leqq\sigma\leqq\sigma_0'$

$$f(s)=o(|t|). \tag{20}$$

---

[17]) H. Bohr, A Theorem concerning Power Series, Proc. of the Lond. Math. Soc. (2) **13** (1914), S. 1—5.

[18]) F. Carlson, Sur les séries de Dirichlet, Comptes rendus **172** (1921), S. 838—840.

[19]) Handbuch, § 230, Satz 44, S. 822 (Perron). Der Satz bleibt natürlich auch bei unserer Definition (4) entsprechend richtig.

Hilfssatz 2[20]). *In* (4) *sei* $a_n = 0$ *für alle* $n < 0$ (*also* $\sigma'_B = \infty$) *und es sei* $\gamma > \sigma_B$. *Dann ist* (20) *sogar für alle* $\sigma \geqq \gamma$ *gleichmäßig erfüllt.*

Hilfssatz 3[21]). *In* (4) *sei* $a_n = 0$ *für alle* $n < n_0$. (4) *konvergiere für* $s = s_0$. *Dann konvergiert* (4) *gleichmäßig in jedem Winkelraum*

$$|\operatorname{ampl}(s - s_0)| \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Ferner formulieren wir als Hilfssätze diejenigen Resultate des Lindelöf-Phragménschen Problemkreises[1]), die im folgenden das Gerüst für unsere Untersuchungen abgeben werden.

Hilfssatz 4[22]). *Die Funktion* $F(s)$ *sei in dem Winkelraum*

$$|\operatorname{ampl}(s - s_0)| \leqq \alpha \leqq \pi \tag{21}$$

regulär. Auf den Randgeraden gelte für ein $M > 0$ *die gleichmäßige Beschränkung*

$$|F(s)| \leqq M, \tag{22}$$

während für jedes feste $\varepsilon > 0$ *bei wachsendem* $r = |s - s_0|$ *gleichmäßig in* (21)

$$F(s) = O\left(e^{\varepsilon r^{\frac{\pi}{2\alpha}}}\right) \tag{23}$$

erfüllt ist.

Dann gilt (22) *sogar im ganzen Winkelraum* (21).

Anmerkung. Natürlich darf der Winkelraum (21) auch beliebig anders in der s-Ebene orientiert sein.

Hilfssatz 5[23]). *Die Funktion* $F(s)$ *sei in dem Streifen*

$$\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma'_0 \tag{24}$$

regulär und auf den beiden Randgeraden sei (22) *erfüllt, während für ein gewisses reelles* k *bei wachsendem* $|t|$ *gleichmäßig in* (24)

$$F(s) = O\left(e^{|t|^k}\right) \tag{25}$$

gilt.

Dann bleibt (22) *sogar im ganzen Streifen* (24) *richtig.*

Als erste und zwar unmittelbare Anwendung erhalten wir aus Hilfssatz 5 für unser $f(s)$ den in der Theorie der transformierten Laurentreihen (6) klassischen

[20]) Handbuch, § 230, Satz 45, S. 824 (Perron).
[21]) Handbuch, § 209, Satz 11, S. 737 (Cahen).
[22]) Siehe[1]), S. 385—386.
[23]) Siehe [1]), S. 388.

Satz I. *Es sei* $\gamma < \gamma'$, *beide aus* (11). *Für ein* $M > 0$ *sei auf* $\sigma = \gamma$ *und* $\sigma = \gamma'$

$$|f(s)| \leqq M \tag{18}$$

erfüllt. Dann gilt (18) *sogar für alle* $\gamma \leqq \sigma \leqq \gamma'$.

Fast ebenso unmittelbar ergibt sich der entsprechende

Satz II. *Es sei* $\gamma < \gamma'$, *beide aus* (11), *und auf* $\sigma = \gamma$ *und* $\sigma = \gamma'$ *sei*

$$u(s) \geqq 0 \tag{19}$$

erfüllt. Dann gilt (19) *sogar für alle* $\gamma \leqq \sigma \leqq \gamma'$.

Beweis. Die Funktion

$$F(s) = e^{-f(s)} \tag{a}$$

erfüllt wegen

$$|F(s)| = e^{-u(s)} \leqq 1 \tag{b}$$

auf $\sigma = \gamma$ und $\sigma = \gamma'$, und weil zufolge (12) für ein gewisses k

$$F(s) = e^{O(|t|^k)} = O(e^{|t|^{k+1}}) \tag{c}$$

für alle $\gamma \leqq \sigma \leqq \gamma'$ erfüllt ist, die Voraussetzungen von Hilfssatz 5. Im ganzen Streifen gilt daher (b), d. h. (19).

Wir wenden uns jetzt zum Beweise desjenigen Satzes, der ein vollständiges Analogon zu dem entsprechenden klassischen Potenzreihensatze bildet und wegen seiner fundamentalen Wichtigkeit, die ihm auch hier zukommt, wohl als Hauptsatz dieses Paragraphen zu gelten hat.

Satz III. *In der Reihe* (4) *sei* $a_n = 0$ *für alle* $n < 0$. *Es sei* γ *aus* (11) *und auf* $\sigma = \gamma$

$$u(s) \geqq 0 \tag{19}$$

erfüllt.

Dann gilt (19) *sogar für alle* $\sigma \geqq \gamma$.

Beweis. Zunächst ist wegen der Voraussetzung über die a_n

$$\sigma_B' = \sigma_e' = \infty.$$

Es sei $\gamma' > \mathrm{Max}(\sigma_B, \gamma)$. Nach Hilfssatz 2 gilt dann gleichmäßig für alle $\sigma \geqq \gamma'$

$$f(s) = o(|t|), \tag{a}$$

während im Streifen $\gamma \leqq \sigma \leqq \gamma'$ nach (12) für ein gewisses k, das natürlich $\geqq 1$ gewählt werden kann und soll,

$$f(s) = O(|t|^k) \tag{b}$$

erfüllt ist. Dieselbe Abschätzung gilt also gleichmäßig für $\sigma \geqq \gamma$.

Die Funktion

(c) $$F(s) = e^{-f(s)}$$

ist für $\sigma \geqq \gamma$ regulär und auf $\sigma = \gamma$ gilt wegen (19)

(d) $$|F(s)| \leqq 1,$$

während zufolge (b) für alle $\sigma \geqq \gamma$ gleichmäßig

(e) $$F(s) = O(e^{|t|^{k+1}})$$

erfüllt ist.

Es sei jetzt ein ϑ mit

(f) $$\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{k+1}\right) < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

beliebig, aber fest gewählt. Dann ist in dem Winkelraum

(g) $$|\text{ampl.}\,(s-\gamma)| \leqq \vartheta$$

$f(s)$ also auch $F(s)$ gleichmäßig beschränkt. Denn in dem endlichen Dreieck, welches den $\gamma \leqq \sigma \leqq \gamma'$ des Winkelraums entspricht, ist dies gewiß der Fall; in dem Restgebiete folgt es aber offenbar aus Hilfssatz 3 in Verbindung mit der Voraussetzung über die a_n. Es gibt also ein $M \geqq 1$, so daß für alle s aus (g)

(h) $$|F(s)| \leqq M$$

erfüllt ist. Insbesondere gilt dies auf den Schenkeln des Winkelraums.

Nunmehr betrachten wir diejenigen Bögen $s - \gamma = r$, welche in den beiden noch nicht behandelten restlichen Winkelräumen der Halbebene $\sigma \geqq \gamma$ liegen. Auf ihnen gilt wegen (e) und weil wegen (f)

(i) $$k+1 < \frac{\pi}{\frac{\pi}{2} - \vartheta}$$

ist, für jedes feste $\varepsilon > 0$ gleichmäßig mit wachsendem r

(j) $$F(s) = O(e^{r^{k+1}}) = O\left(e^{\varepsilon r^{\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}-\vartheta}}}\right).$$

Auf jeden der beiden restlichen Winkelräume, deren Öffnung je $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ ist, läßt sich also unter Beachtung von (d) und (h) der Hilfssatz 4 (Anmerkung!) anwenden. Er lehrt, daß in ihrem Innern und daher wegen (h) in der ganzen Halbebene $\sigma \geqq \gamma$ die Abschätzung (h) gilt. Auf $\sigma = \gamma$ ist aber (d) richtig. Eine nochmalige Anwendung von Hilfssatz 4 mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$, die wegen (h) möglich ist, zeigt jetzt die Gültigkeit von (d), d. h. von (19) in der ganzen Halbebene $\sigma \geqq \gamma$.

Satz III enthält offenbar — man beachte die zu Anfang dieses Paragraphen gemachte Bemerkung über die Beschränkung (19) — den

Satz IV. *In der Reihe* (4) *sei* $a_n = 0$ *für alle* $n < 0$. *Es sei* γ *aus* (11) *und für ein* $M > 0$ *auf* $\sigma = \gamma$

$$|f(s)| \leqq M \tag{18}$$

erfüllt.

Dann gilt (18) *sogar für alle* $\sigma \geqq \gamma$.

Ein wichtiger Spezialfall von Satz IV ist weiterhin der mit anderem Beweise (partielle Summation von (4)) bereits bekannte[10])

Satz V. *In der Reihe* (4) *seien nur endlich viele* a_n *mit* $n < 0$ *von* 0 *verschieden. Auf der Geraden* $\sigma = \gamma$ *sei* (4) *gleichmäßig konvergent. Dann ist dies sogar in der ganzen Halbebene* $\sigma \geqq \gamma$ der Fall.

Auf Satz V beruht offenbar die Existenz des Streifens (10).

Wenn in den Sätzen III und IV die Voraussetzung über die a_n in die allgemeinere des Satzes V (der in der Literatur übliche Fall) geändert wird, so sind natürlich (vgl. $f(s) = e^s$) die Beschränkungen (18) und (19) auf $\sigma = \gamma$ nicht mit denselben Konstanten M bzw. 0 in die Halbebene $\sigma \geqq \gamma$ übertragbar. Aber es gilt doch die Tatsache, daß dann auf jeder Geraden $\sigma = \gamma'$ mit $\gamma' > \gamma$ $f(s)$ beschränkt bzw. einseitig beschränkt bleibt. Hiervon überzeugt man sich sofort, wenn man in (4) die endlich vielen Glieder der Reihe, die zu den $n < 0$ gehören, abspaltet und für sich betrachtet.

Bezüglich (18) können wir diese Bemerkung noch zu einem wichtigen Satze verschärfen, der ebenfalls sein Analogon in der Potenzreihentheorie hat und aus Satz IV, mit ganz entsprechend einfachem Beweise wie in jener, gefolgert werden kann. Als Spezialfall ($n_0 = 1$) enthält er eine Übertragung des bekannten Schwarzschen Lemmas[13]) auf Dirichletsche Reihen und auch ($n_0 = 0$) den Satz IV selbst.

Satz VI. *In der Reihe* (4) *sei* $a_n = 0$ *für alle* $n < n_0$. *Es sei* γ *aus* (11) *und auf* $\sigma = \gamma$ *für ein* $M > 0$

$$|f(s)| \leqq M \tag{18}$$

erfüllt.

Dann gilt für $\sigma \geqq \gamma$

$$|f(s)| \leqq M e^{-\lambda_{n_0}(\sigma-\gamma)}, \tag{26}$$

wo für $\sigma > \gamma$ *das Gleichheitszeichen nur im Falle*

$$f(s) \equiv \varepsilon \cdot M e^{-\lambda_{n_0}(s-\gamma)} \qquad (|\varepsilon| = 1) \tag{27}$$

möglich ist.

Beweis. Die Funktion

$$g(s) = e^{\lambda_{n_0}(s-\gamma)} f(s)$$

erfüllt offenbar die Voraussetzungen des Satzes IV, weshalb für alle $\sigma \geqq \gamma$

$$|g(s)| \leqq M,$$

d. h. (26) folgt.

Es sei jetzt $\sigma_0 > \gamma$. Wenn für ein $s_0 = \sigma_0 + i t_0$ in (26) das Gleichheitszeichen richtig ist, so folgt doch

$$|g(s_0)| = M,$$

also natürlich $|g(s)| \equiv M$, d. i. (27).

Übrigens kann auch für die Gesamtheit der s mit $\sigma = \sigma_0$ die obere Grenze von $|f(s)|$ nur im Falle (27) gleich der rechten Seite von (26) werden, wie wir später (Satz XVI, Anm. 1) sehen werden.

Im Anschluß an Satz VI kann man noch einige interessante Bemerkungen machen, sämtlich unter den Voraussetzungen dieses Satzes, d. h. für die in der Literatur üblichen Reihen.

1. Wenn $n_0 = 0$, also $\lambda_{n_0} = 0$ ist, so folgt aus (18), daß gleichmäßig mit wachsendem σ

$$f(s) \to a_0 \tag{28}$$

gilt.

Denn schreiben wir

$$f(s) = a_0 + g(s),$$

so ist auch $g(s)$ auf $\sigma = \gamma$ gleichmäßig beschränkt und (26) lehrt

$$g(s) \to 0$$

gleichmäßig in σ.

Bei beliebigem n_0 schreibe man

$$f(s) = e^{-\lambda_{n_0} s}(a_{n_0} + g_1(s)),$$

und auch $g_1(s)$ ist auf $\sigma = \gamma$ gleichmäßig beschränkt. Daher gilt allgemeiner gleichmäßig mit wachsendem σ

$$e^{\lambda_{n_0} s} f(s) \to a_{n_0}. \tag{29}$$

Diese Relation ist, wenn s z. B. auf den Winkelraum des Hilfssatzes 3 beschränkt bleibt, wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (4) daselbst selbstverständlich, hier aber in dieser Allgemeinheit recht beachtenswert.

2. Die Relation (29) lehrt insbesondere, immer unter der Voraussetzung (18), die Existenz eines γ', so daß in der ganzen Halbebene $\sigma \geqq \gamma'$ $f(s)$ keine Nullstellen besitzt. Auch diese Tatsache ergänzt das für gewöhnlich in dieser Richtung Genannte in beachtenswerter Weise. Bezüglich des Eindeutigkeitssatzes für Dirichletsche Reihen hat also insbesondere

die Beschränkung (18) dieselbe Bedeutung wie etwa die Existenz von σ_G[24]: *Wenn zwei Funktionen* $f_1(s)$ *und* $f_2(s)$, *beide durch Dirichletsche Reihen des üblichen Typus erklärt, in einer Folge von Punkten*

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots \text{ mit } \sigma_n \to \infty$$

dem Werte nach übereinstimmen und wenn auf einer Geraden $\sigma = \gamma$, *die den beiden zugehörigen Halbebenen endlicher Ordnung angehört, die Differenz* $|f_1(s) - f_2(s)|$ *gleichmäßig beschränkt ist, so folgt die Identität der beiden Reihen.*

Wir wollen nunmehr unsere Folgerungen aus der Beschränkung (18) noch nach einer neuen Richtung hin weiter ausbauen.

Es bezeichne, falls endlich vorhanden, $M(\sigma)$ die obere Grenze von $|f(s)|$ für alle Punkte $s = \sigma + it$ der durch σ festgelegten Geraden. Zum Studium dieser Größe dient der folgende von Herrn Doetsch[25] bewiesene Satz, der eine Verallgemeinerung des bekannten Hadamardschen Dreikreisesatzes[26] darstellt.

Hilfssatz 6 (Dreigeradensatz). *Es sei* $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$. *Die Funktion* $F(s)$ *sei in dem Streifen* $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_3$ *regulär, gleichmäßig beschränkt und nicht identisch* 0. $M(\sigma)$ *bezeichne die hiernach endliche obere Grenze von* $|F(s)|$ *auf einer Geraden* $\sigma =$ konst. *des Streifens.*

Dann gilt

$$M(\sigma_2) \leqq M(\sigma_1)^{\frac{\sigma_3-\sigma_2}{\sigma_3-\sigma_1}} \cdot M(\sigma_3)^{\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_3-\sigma_1}}, \tag{30}$$

d. h. $\log M(\sigma)$ *ist im ganzen Streifen eine konvexe Funktion von* σ.

Dieser Hilfssatz, auf unser $f(s)$ angewandt, liefert unmittelbar eine willkommene Ergänzung und Verschärfung des Satzes I. Insbesondere aber gestattet er auch einen interessanten Zusatz zu Satz VI, auf den schon Herr Doetsch[25] im Anschluß an den Dreigeradensatz (allerdings, in Ermangelung unserer Sätze, nur für ein etwa vorhandenes absolutes Konvergenzgebiet von (4)) hingewiesen hat. Er bildet ein vollständiges Analogon zu dem bekannten Haupttheorem über die Lindelöfsche μ-Funktion[12].

Satz VII. *In der Reihe* (4) *sei* $a_n = 0$ *für alle* $n < n_0$, *aber* $a_{n_0} \neq 0$. *Es sei* γ *aus* (11) *und auf* $\sigma = \gamma$ *für ein* $M > 0$

$$|f(s)| \leqq M \tag{18}$$

[24]) Enc. Art. S. 728.

[25]) G. Doetsch, Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden, Math. Zeitschrift 8 (1920), S. 237–240.

[26]) J. Hadamard, Sur les fonctions entières, Bulletin de la Société math. 24 (1896), S. 186–187.

erfüllt. Es bezeichne für alle $\sigma \geqq \gamma$

$$L(\sigma) = e^{\lambda_{n_0}\sigma} M(\sigma), \tag{31}$$

was nach Satz IV *einen Sinn hat.*

Dann ist in $\sigma \geqq \gamma$ $\log L(\sigma)$ *eine (für* $\sigma = \gamma$ *nach rechts) stetige, konvexe, mit wachsendem* σ *nicht zunehmende und sogar mit Ausnahme des Falles*

$$f(s) \equiv a_{n_0} e^{-\lambda_{n_0} s} \tag{32}$$

monoton abnehmende Funktion von σ, *für die bei* $\sigma \to \infty$ *die asymptotische Relation*

$$L(\sigma) \to |a_{n_0}| \tag{33}$$

gilt.

Beweis. (33) ist bereits in (29) enthalten. Daß $\log L(\sigma)$ für $\sigma \geqq \gamma$ eine konvexe Funktion von σ ist, lehrt der Hilfssatz 6, und aus Satz VI folgt unmittelbar für $\gamma \leqq \sigma_1 < \sigma_2$

$$L(\sigma_2) \leqq L(\sigma_1). \tag{a}$$

Für $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ gilt nun nach (30)

$$L(\sigma_2) \leqq L(\sigma_1)^{\frac{\sigma_3-\sigma_2}{\sigma_3-\sigma_1}} \cdot L(\sigma_3)^{\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_3-\sigma_1}}. \tag{b}$$

Wenn also in (a) das Gleichheitszeichen eintritt, folgt für jedes $\sigma_3 > \sigma_2$

$$L(\sigma_2) \leqq L(\sigma_3), \tag{c}$$

was nach Satz VI nur möglich ist, wenn auch

$$L(\sigma_3) = L(\sigma_2) = L(\sigma_1) \tag{d}$$

wird. Insbesondere folgt dann mit $\sigma_3 \to \infty$ wegen (33)

$$L(\sigma_1) = |a_{n_0}| \tag{e}$$

Daß dies nur im Falle (32) möglich ist — vgl. die Schlußbemerkung beim Beweise des Satzes VI! —, werden wir am leichtesten aus den Abschätzungen von Satz XVI des § 3 ersehen, auf die hier verwiesen sein mag.

Es erübrigt noch, die Stetigkeitseigenschaften von $L(\sigma)$, d. i. auch von $\log L(\sigma)$, zu erweisen. Wegen der Monotonie von $L(\sigma)$ existiert jedenfalls für jedes $\sigma > \gamma$

$$L'(\sigma) = L(\sigma - 0) \quad \text{und} \quad L''(\sigma) = L(\sigma + 0), \tag{f}$$

für $\sigma = \gamma$ noch $L''(\gamma)$, und es ist

$$L''(\sigma) \leqq L(\sigma) \leqq L'(\sigma). \tag{g}$$

Wäre nun etwa $L''(\sigma) < L(\sigma)$, so würde es ein $s_0 = \sigma + it_0$ geben, so daß auch

$$|e^{\lambda_{n_0} s_0} f(s_0)| > L''(\sigma) \tag{h}$$

wird. Daß dies dann auch für alle Punkte einer gewissen Umgebung von s_0, insbesondere für solche mit größerem σ, richtig bliebe, würde der Bedeutung von $L''(\sigma)$ widersprechen. Ebenso beweist man $L'(\sigma) = L(\sigma)$ und damit endgültig die Stetigkeit von $L(\sigma)$.

Zum Schlusse dieses Paragraphen möge uns jetzt wieder die einseitige Beschränkung vom Typus (19) beschäftigen. Es bezeichne nunmehr, falls endlich vorhanden, $m(\sigma)$ die untere Grenze von $u(s)$ für alle Punkte $s = \sigma + it$ der durch σ festgelegten Geraden. Man erhält dann sofort statt Hilfssatz 6 den

Hilfssatz 7[27]). *Es sei* $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$. *Die Funktion* $F(s)$ *sei in dem Streifen* $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_3$ *regulär und ihr Realteil daselbst gleichmäßig nach unten beschränkt. Bezeichnet* $m(\sigma)$ *die hiernach endliche untere Grenze von* $\Re(F(s))$ *auf einer Geraden* $\sigma =$ konst. *des Streifens, so gilt*

$$m(\sigma_2) \geqq m(\sigma_1)\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_3 - \sigma_1} + m(\sigma_3)\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_3 - \sigma_1}, \tag{34}$$

d. h. $m(\sigma)$ *ist im ganzen Streifen eine konkave Funktion von* σ.

Beweis. Man setze nur

$$G(s) = e^{-F(s)},$$

dann wird Hilfssatz 6 mit

$$M(\sigma) = e^{-m(\sigma)}$$

anwendbar.

Dieser Satz, auf unser $f(s)$ angewandt, ergänzt wiederum den Satz II in wünschenswerter Weise.

Übrigens steht bei den in der Literatur auftretenden Reihen (4) einseitige und wirkliche Beschränktheit von $f(s)$ auf einer Geraden $\sigma = \gamma$ aus (11) in sehr einfachem Zusammenhange. Nach einem etwas allgemeineren, auf den bekannten Überlegungen des Picardschen Ideenkreises beruhenden Satze des Herrn Wennberg[28]) folgt nämlich in Verbindung mit Satz III unmittelbar

[27]) Den analogen „Dreikreisesatz" hat zuerst Herr A. Walther ausgesprochen: Maximum und Minimum einer harmonischen Funktion auf Kreisen, Math. Zeitschrift **15** (1921), S. 157–160.

[28]) S. Wennberg, Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, Inauguraldissertation, Uppsala (1920), Satz VI, S. 30. Der Satz lautet mit unseren Bezeichnungen: *In der Reihe* (4) *seien nur endlich viele* a_n *mit* $n < 0$ *von 0 verschieden. Es sei ferner* $\gamma_0 < \gamma_1$ *und* $f(s)$ *für* $\sigma > \gamma_0$ *regulär.* $M(\gamma_1)$ *existiere nicht.*

Dann nimmt $f(s)$ *in* $\sigma > \gamma_0$ *jeden Wert mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an.*

Satz VIII. *In der Reihe* (4) *seien nur endlich viele* a_n *mit* $n < 0$ *von* 0 *verschieden. Auf* $\sigma = \gamma$ *aus* (11) *existiere* $m(\gamma)$.

Dann existiert sogar $M(\sigma)$ *für alle* $\sigma > \gamma$.

Wir können also insbesondere in den Bemerkungen 1 und 2, die wir im Anschluß an Satz VI gemacht haben, die Voraussetzung (18) durch eine schwächere vom Typus (19) ersetzen.

Ebenso steht dem Satze VII, wenn statt (18) daselbst nur die Existenz von $m(\gamma)$ vorausgesetzt ist, auf Grund von Hilfssatz 7 die Aussage zur Seite, daß

$$l(\sigma) = \operatorname{Min} \Re\left(e^{\lambda_{n_0} s} \cdot f(s)\right) \qquad \text{(bei festem } \sigma\text{)} \tag{35}$$

in $\sigma > \gamma$ eine stetige, konkave, mit wachsendem σ nicht abnehmende und sogar mit Ausnahme des Falles (32) monoton zunehmende Funktion von σ ist, mit

$$l(\sigma) \to \alpha_{n_0} \tag{36}$$

bei $\sigma \to \infty$.

Denn nach Satz VIII existiert in $\sigma > \gamma$ die Größe $M(\sigma)$ und also auch $l(\sigma)$. Alles andere ist jetzt, wenn man noch (29) beachtet, wohl evident.

§ 2.

Das Ziel dieses Paragraphen ist, in Analogie zu den Formeln (13), (16) und (17) Koeffizientenformeln für die Reihenentwicklung (4) anzugeben, welche zu Abschätzungszwecken in dem Rest dieser Arbeit dienen sollen. Im allgemeinen, z. B. bei den in der Literatur üblichen Reihen, werden wir dabei schon mit den bekannten „Limeskoeffizientenformeln" des folgenden Satzes auskommen.

Satz IX[29]). *Es sei* γ *aus dem Konvergenzstreifen* (8). *Dann ist für alle* n

$$a_n = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2Ti} \int_{\gamma - Ti}^{\gamma + Ti} e^{\lambda_n s} f(s)\, ds, \tag{37}$$

das Integral geradlinig erstreckt.

Aus (37), einem offenbaren Analogon zur Cauchyformel (13), ergibt sich nun sofort unter Beachtung der jetzt ihre Zweckmäßigkeit bewährenden λ-Vorschrift (2)

[29]) Handbuch, Satz 35, S. 788 (Landau). Die Formeln gelten natürlich auch für unser (4).

$$\bar{a}_n = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{2Ti}\int_{-T}^{T} e^{\lambda_n \bar{s}}\,\overline{f(s)}\,(-i\,dt) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2Ti}\int_{\gamma-Ti}^{\gamma+Ti} e^{\lambda_n \bar{s}}\,\overline{f(s)}\,ds \qquad (s=\gamma+it)$$

$$\bar{a}_{-n}\,e^{2\lambda_n\gamma} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2Ti}\int_{\gamma-Ti}^{\gamma+Ti} e^{\lambda_n s}\,\overline{f(s)}\,ds,$$

also nach Addition zu (37)

$$a_n + \bar{a}_{-n}\,e^{2\lambda_n\gamma} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{Ti}\int_{\gamma-Ti}^{\gamma+Ti} e^{\lambda_n s}\,u(s)\,ds \tag{38}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \alpha_n\,e^{-\lambda_n\gamma} + \alpha_{-n}\,e^{\lambda_n\gamma} &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} u(\gamma,t)\cos\lambda_n t\,dt \\ \beta_n\,e^{-\lambda_n\gamma} - \beta_{-n}\,e^{\lambda_n\gamma} &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} u(\gamma,t)\sin\lambda_n t\,dt \end{aligned} \qquad u(\gamma,t)=u(\gamma+it), \tag{39}$$

die Analoga zu den Fourierformeln (17) bzw. (16).

Für unsere Zwecke benötigen wir noch eine Reihe weiterer wichtiger Koeffizientenformeln, die zur Darstellung einen geschlossenen Integralausdruck bieten und schon wegen ihrer formalen Schönheit selbständiges Interesse beanspruchen dürfen. Man erhält sie aus den sogenannten Cahen-Perronschen Koeffizientenformeln, die wesentlich tiefer als Satz IX liegen und folgendermaßen lauten.

Satz X[30]). *Es sei γ aus (8), $s_0 = \sigma_0 + it_0$ beliebig aber fest, $\gamma - \sigma_0 \neq 0$ und x beliebig reell.*

Es bezeichne

$$K(x,\gamma,s_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{(\gamma)} \frac{e^{xs}f(s)}{s-s_0}\,ds & \text{kein} \\ \lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} \frac{e^{xs}f(s)}{s-s_0}\,ds & \text{ein} \end{cases} \quad \text{, wenn } \lambda_n = x \text{ ist,} \tag{40}$$

wo (γ) die Integration über die Gerade $\sigma=\gamma$ anzeigt und das zweite Integral, geradlinig erstreckt, den sogenannten „Hauptwert" daselbst darstellt.

Dann ist

$$K(x,\gamma,s_0) = \begin{cases} \sum\limits_{\lambda_n \leqq x}' a_n\,e^{(x-\lambda_n)s_0} & \gamma-\sigma_0>0 \\ -\sum\limits_{x \leqq \lambda_n}' a_n\,e^{(x-\lambda_n)s_0} & \gamma-\sigma_0<0. \end{cases} \quad \text{für} \tag{41}$$

[30]) Handbuch, § 233, Satz 50, S. 832.

Hierbei bedeutet Σ', daß im Falle $x = \lambda_m$ das zu $n = m$ gehörige Summenglied nur mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ zu zählen ist.

Bei unserer Reihendefinition (4) bleibt auch (41) offenbar gültig. Die Reihen rechts sind jetzt hier im allgemeinen unendliche, die natürlich konvergieren, da z. B. im Falle $\gamma - \sigma_0 > 0$ aus der vorausgesetzten Konvergenz von

$$\sum_{\lambda_n \leqq x}' a_n e^{-\lambda_n \gamma}$$

diejenige von

$$\sum_{\lambda_n \leqq x}' a_n e^{-\lambda_n s_0}$$

folgt. Übrigens ist das Integral $K(x, \gamma, s_0)$ innerhalb (8) von γ unabhängig.

Wir wollen nunmehr der Formel (41) eine entsprechende Fourierformel zur Seite stellen, die den Realteil $u(s)$ von $f(s)$ explizit bevorzugt.

Die Reihe

$$g(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n e^{-2\lambda_n \gamma} e^{\lambda_n s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_{-n} e^{2\lambda_n \gamma} e^{-\lambda_n s} \tag{42}$$

ist ebenfalls eine Reihe (4), die jedenfalls auf $\sigma = \gamma$ konvergiert, wo überdies

$$g(s) = \overline{f(s)} \tag{43}$$

wird. Ohne daß wir zu zeigen brauchen, daß $\sigma = \gamma$ eine innere Gerade des Konvergenzstreifens von $g(s)$ bleibt, gilt doch der Satz X für $g(s)$ und γ, da zum Beweise[30]) desselben außer den Konvergenzeigenschaften von (4) auf $\sigma = \gamma$, die natürlich auf (42) übergehen, nur die asymptotische Abschätzung des Hilfssatzes 1

$$f(s) = o(|t|) \tag{20}$$

daselbst wesentlich ist, die wegen (43) auch für $g(s)$ gilt.

Bezeichnet man also mit $L(x, \gamma, s_0)$ die den K entsprechenden Integrale, wenn man daselbst $\overline{f(s)}$ statt $f(s)$ einsetzt, so erhält man wegen (41), (42) und (43)

$$L(x, \gamma, s_0) = \begin{cases} \sum_{\lambda_n \leqq x}' \bar{a}_{-n} e^{2\lambda_n \gamma} e^{(x-\lambda_n) s_0} & \gamma - \sigma_0 > 0 \\ -\sum_{x \leqq \lambda_n}' \bar{a}_{-n} e^{2\lambda_n \gamma} e^{(x-\lambda_n) s_0} & \gamma - \sigma_0 < 0 \end{cases} \quad \text{für} \tag{44}$$

und hieraus nach Addition zu (41) den

Satz XI. *Es sei γ aus (8), $s_0 = \sigma_0 + i t_0$ beliebig aber fest, $\gamma - \sigma_0 \neq 0$ und x beliebig reell.*

Es bezeichne

$$J(x, \gamma, s_0) = \begin{cases} \frac{1}{\pi i} \int_{(\gamma)} \frac{e^{xs}}{s - s_0} u(s)\, ds & \text{kein} \\ \lim_{T \to \infty} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma - Ti}^{\gamma + Ti} \frac{e^{xs}}{s - s_0} u(s)\, ds & \text{ein} \end{cases}, \quad \text{wenn} \quad \lambda_n = x \quad \text{ist.} \tag{45}$$

Dann ist

$$(46)\quad J(x,\gamma,s_0)=\begin{cases} e^{xs_0}\Big\{\sum\limits_{\lambda_n\leqq x}{}'a_n e^{-\lambda_n s_0}+\sum\limits_{-x\leqq\lambda_n}{}'\bar a_n e^{-\lambda_n(2\gamma-s_0)}\Big\} & \\ -e^{xs_0}\Big\{\sum\limits_{\lambda_n\leqq -x}{}'\bar a_n e^{-\lambda_n(2\gamma-s_0)}+\sum\limits_{x\leqq\lambda_n}{}'a_n e^{-\lambda_n s_0}\Big\} & \end{cases}\quad \begin{matrix} \\ \text{für} \end{matrix}\quad \begin{matrix} \gamma-\sigma_0>0 \\ \gamma-\sigma_0<0. \end{matrix}$$

Die Formeln (41) und (46) geben uns sofort je eine Cauchy- und eine Fourierkoeffizientenformel, wenn man $s_0=0$ (also $\gamma\neq 0$) wählt, ε beliebig innerhalb

$$(47)\qquad 0<\varepsilon<\operatorname{Min}\{\lambda_{n+1}-\lambda_n,\ \lambda_n-\lambda_{n-1}\}$$

bestimmt und sodann die Differenzen

$$K(\lambda_n+\varepsilon,\gamma,0)-K(\lambda_n-\varepsilon,\gamma,0)$$

bzw.

$$J(\lambda_n+\varepsilon,\gamma,0)-J(\lambda_n-\varepsilon,\gamma,0)$$

bildet.

Man erhält so

Satz XII. *Es sei γ aus* (8). *Dann gilt für alle n*

$$(48)\qquad a_n=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{(\gamma)}\frac{e^{\lambda_n s}\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon s}{s}f(s)\,ds,$$

$$(49)\qquad a_n+\bar a_{-n}e^{-2\lambda_n\gamma}=\frac{2}{\pi i}\int\limits_{(\gamma)}\frac{e^{\lambda_n s}\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon s}{s}u(s)\,ds.$$

Diese Formeln gelten in der Tat auch für den bisher ausgeschlossenen Fall $\gamma=0$. Zunächst ist dies für (48) nach dem Cauchyschen Satze evident, da der Integrand auf $\sigma=0$ regulär bleibt und das Integral von einer Geraden $\sigma=\gamma>0$ auf $\sigma=0$ verlegt werden darf, da nach Hilfssatz 1 gleichmäßig für alle $0\leqq\sigma\leqq\gamma$, falls auch 0 in (8) liegt, die Abschätzung (20) erfüllt ist.

Man erhält dann also

$$a_n=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{(0)}\frac{e^{\lambda_n s}\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon s}{s}f(s)\,ds=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\lambda_n ti}\sin\varepsilon t}{t}f(ti)\,dt,$$

$$\bar a_{-n}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\lambda_n ti}\sin\varepsilon t}{t}\overline{f(ti)}\,dt=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{(0)}\frac{e^{\lambda_n s}\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon s}{s}\overline{f(s)}\,ds$$

und daher nach Addition auch (49) für $\gamma=0$.

Die Formeln (48) und (49) entsprechen wiederum (13) bzw. (17). Bezüglich (48) z. B. kann man, wenn $f(s)$ aus (6) nach der Transformation (7) erklärt ist, folgendermaßen den Übergang zu (13) erzielen.

Für alle n kann $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gewählt werden, und wegen der Periodizität von $f(s)$ wird

$$a_n = \frac{1}{\pi i}\int_{(\gamma)} \frac{e^{ns}\,\mathfrak{Sin}\frac{s}{2}}{s} f(s)\,ds = \frac{1}{\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{\gamma+2k\pi i}^{\gamma+2(k+1)\pi i} \frac{e^{ns}\,\mathfrak{Sin}\frac{s}{2}}{s} f(s)\,ds$$

$$\frac{1}{\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{\gamma}^{\gamma+2\pi i} \frac{(-1)^k e^{ns}\,\mathfrak{Sin}\frac{s}{2}}{s+2k\pi i} f(s)\,ds = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}^{\gamma+2\pi i}\left(\frac{1}{s}+\sum_{k=1}^{\infty} 2s\,\frac{(-1)^k}{s^2+4k^2\pi^2}\right) e^{ns}\,\mathfrak{Sin}\frac{s}{2} f(s)\,ds,$$

da die gliedweise Integration offenbar legitim ist.

Wegen

$$\mathfrak{Sin}\, s = -i \sin is$$

und der bekannten Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{\sin s} = \frac{1}{s} + \sum_{k=1}^{\infty} 2s\,\frac{(-1)^k}{s^2-k^2\pi^2}$$ [31])

erhält man nun weiter

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}^{\gamma+2\pi i} i\left(\frac{1}{\frac{is}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\frac{\frac{is}{2}\,(-1)^k}{\left(\frac{is}{2}\right)^2 - k^2\pi^2}\right) e^{ns}\cdot -i\sin\frac{is}{2} f(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}^{\gamma+2\pi i} e^{ns} f(s)\,ds,$$

d. i. (13).

Wendet man bei einem γ aus (8) die auf die Gerade $\sigma = 0$ bezogenen Formeln (48) und (49) statt auf $f(s)$ vielmehr auf das in

$$\sigma_B - \gamma < \sigma < \sigma'_B - \gamma$$

erklärte

$$f_1(s) = f(s+\gamma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n\gamma} e^{-\lambda_n s}$$

an, so ergibt sich eine für Abschätzungszwecke besonders brauchbare Formelgruppe:

(50) $$a_n = \frac{e^{\lambda_n\gamma}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_n t}\,\frac{\sin\varepsilon t}{t}\, f(\gamma, t)\,dt,$$

(51) $$a_n + \bar{a}_{-n} e^{2\lambda_n\gamma} = \frac{2e^{\lambda_n\gamma}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_n t}\,\frac{\sin\varepsilon t}{t}\, u(\gamma, t)\,dt$$

[31]) Vgl. etwa W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, Leipzig und Berlin bei Teubner, 2. Auflage (1912), S. 509.

und

$$\alpha_n e^{-\lambda_n \gamma} + \alpha_{-n} e^{\lambda_n \gamma} = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda_n t \frac{\sin \varepsilon t}{t} u(\gamma, t)\, dt,$$

(52)

$$\beta_n e^{-\lambda_n \gamma} - \beta_{-n} e^{\lambda_n \gamma} = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \lambda_n t \frac{\sin \varepsilon t}{t} u(\gamma, t)\, dt.$$

Die den Fourierschen analoge Bedeutung dieser Formeln für die Theorie allgemeiner (nach $\lambda_n t$ statt nt) fortschreitender trigonometrischer Reihen liegt auf der Hand.

Zum Schlusse dieses Paragraphen sei auch noch dem Cahen-Perronschen Satze X ein analoger, formal fast durchsichtigerer Satz zur Seite gestellt, der gerade die bisher im Falle $s_0 = 0$ ausgeschlossene Gerade $\sigma = 0$ als Integrationsweg benutzt.

Satz XIII. *Es sei γ aus (8) und x reell. Dann ist*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xt}{t} f(\gamma, t)\, dt = \operatorname{sign} x \cdot \sum_{|\lambda_n| \leqq |x|}{}' a_n e^{-\lambda_n \gamma}, \tag{53}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos xt}{t} f(\gamma, t)\, dt = - \sum_{|\lambda_n| \geqq |x|}{}' \operatorname{sign} \lambda_n \cdot a_n e^{-\lambda_n \gamma}, \tag{54}$$

wenn kein $\lambda_n = x$ ist, anderenfalls links die „Hauptwerte" der Integrale zu nehmen sind. Hierbei bedeute für $\delta > 0$

$$\int_{-1}^{+1} = \lim_{\delta \to 0} \left\{ \int_{-1}^{-\delta} + \int_{\delta}^{1} \right\}$$

und $\operatorname{sign} 0 = 0$.

Zusatz. Satz XIII gewährt den Vorteil, durch Spalten in Reelles und Imaginäres sofort analoge Fourierformeln zu gewinnen.

Beweis. Es genügt $x \geqq 0$ zu wählen. Ferner sei $\gamma < \gamma_1 < \sigma_B'$, und wir bilden nach der ersten Formel (41), aber für die Funktion $f(s + \gamma)$ statt $f(s)$, die Differenz

(a) $$K(x, \gamma_1 - \gamma, 0) - K(-x, \gamma_1 - \gamma, 0).$$

Verlegt man sodann, was wegen Hilfsatz 1 erlaubt ist, das Integral von der Geraden $\sigma = \gamma_1 - \gamma$ auf $\sigma = 0$, so erhält man unmittelbar (53).

Zum Beweise von (54) bilden wir ebenso, wieder für $f(s + \gamma)$ statt $f(s)$

(b)
$$\begin{aligned} &K(x, \gamma_1 - \gamma, 0) + K(-x, \gamma_1 - \gamma, 0) \\ &= \sum_{\lambda_n \leqq x}{}' a_n e^{-\lambda_n \gamma} + \sum_{\lambda_n \leqq -x}{}' a_n e^{-\lambda_n \gamma} \\ &= f(\gamma) - \sum_{\lambda_n \geqq x}{}' a_n e^{-\lambda_n \gamma} + \sum_{\lambda_n \leqq -x}{}' a_n e^{-\lambda_n \gamma} \\ &= f(\gamma) - \sum_{|\lambda_n| \geqq |x|}{}' \operatorname{sign} \lambda_n \cdot a_n e^{-\lambda_n \gamma}. \end{aligned}$$

Andererseits hat der Ausdruck links in (b) die Form

$$\text{(c)} \qquad \frac{1}{\pi i}\int_{(\gamma_1-\gamma)} \frac{\mathfrak{Cof}\, xs}{s} f(s+\gamma)\,ds,$$

wenn kein $\lambda_n = x$ ist, anderenfalls den „Hauptwert" dieses Integrals. Nach Hilfssatz 1 kann (c) von der Geraden $\sigma = \gamma_1 - \gamma$ auf den Weg (von unten nach oben)

$$\text{(d)} \qquad \begin{cases} s = it \text{ für } |t| \geqq \delta \\ s = \delta e^{i\varphi} \text{ mit } -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \text{ für } |t| \leqq \delta, \end{cases}$$

wo $0 < \delta < \gamma_1 - \gamma$ ist, verlegt werden. Bei genügend kleinem δ gilt nun auf dem Kreisteile von (d) die Entwicklung

$$\text{(e)} \qquad \frac{\mathfrak{Cof}\, xs}{s} f(s+\gamma) = \frac{f(\gamma)}{s} + F(s),$$

wo $F(s)$ in $s = 0$ regulär ist. Mit $\delta \to 0$ wird also daselbst

$$\text{(f)} \qquad \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\pi i}\int_{\delta'} \frac{\mathfrak{Cof}\, xs}{s} f(s+\gamma)\,ds = f(\gamma),$$

woraus wegen (b) jetzt unmittelbar (54) folgt.

§ 3.

Wir wollen jetzt dazu übergehen, unter den Beschränkungsvoraussetzungen (18) und (19) des § 1 Ungleichungen für die Koeffizienten a_n von (4) abzuleiten, wie sie analog in der gewöhnlichen Potenzreihentheorie üblich sind.

Zunächst schicken wir aber einige Hilfssätze voraus, die das asymptotische Verhalten von $f(s)$ bei wachsendem $|t|$ auf Geraden $\sigma = \gamma$ behandeln und die das Verlegen der Integrationswege in den Koeffizientenformeln des vorigen Paragraphen auf allgemeinere Geraden $\sigma = \gamma$ aus (11) ermöglichen sollen.

Hilfssatz 8 [32]). *Die Funktion $F(s)$ sei in dem Streifen*

$$\text{(24)} \qquad \sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_0'$$

regulär. Für reelles k_0 und k_0' gelte bei wachsendem $|t|$

$$\text{(55)} \qquad F(s) = \begin{matrix} O(|t|^{k_0}) \\ O(|t|^{k_0'}) \end{matrix} \quad \text{auf } \sigma = \begin{matrix} \sigma_0 \\ \sigma_0' \end{matrix},$$

[32]) H. R., S. 15. (Lindelöf.)

während in (24) *gleichmäßig für ein gewisses reelles* k

$$F(s) = O(|t|^k) \quad (56)$$

erfüllt ist.

Dann ist gleichmäßig daselbst

$$F(s) = O(|t|^{k(\sigma)}), \quad (57)$$

wo

$$k(\sigma) = k_0 \frac{\sigma_0' - \sigma}{\sigma_0' - \sigma_0} + k_0' \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0' - \sigma_0} \quad (58)$$

die lineare Funktion von σ *bezeichnet, die für* $\sigma = \sigma_0$ *bzw.* $\sigma = \sigma_0'$ *die Werte* k_0 *bzw.* k_0' *annimmt.*

Hilfssatz 9. *Es sei* $\sigma_B < \gamma_0 < \gamma$ (*bzw.* $\gamma < \gamma_0 < \sigma_B'$) *und* γ *aus* (11). *Auf* $\sigma = \gamma$ *sei für ein* $M > 0$

$$|f(s)| \leqq M \quad (18)$$

erfüllt.

Dann gilt gleichmäßig in $\gamma_0 \leqq \sigma \leqq \gamma$ (*bzw.* $\gamma \leqq \sigma \leqq \gamma_0$)

$$f(s) = o(|t|). \quad (20)$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\sigma_B < \gamma_0 < \gamma$, $\gamma_0 < \sigma_B'$, auch kann

$$\gamma \geqq \sigma_B' \quad (a)$$

angenommen werden, anderenfalls nämlich der Satz bereits durch Hilfssatz 1 gegeben ist. Schließlich sei ein γ_1 durch

$$\sigma_B < \gamma_0 < \gamma_1 < \sigma_B' \leqq \gamma \quad (b)$$

eingeführt.

Zunächst gilt für alle $\gamma_0 \leqq \sigma \leqq \gamma_1$ gleichmäßig (20) nach Hilfssatz 1, also auf $\sigma = \gamma_0$ insbesondere

$$f(s) = O(|t|), \quad (c)$$

auf $\sigma = \gamma$ nach (18)

$$f(s) = O(1) = O(|t|^0). \quad (d)$$

Hilfssatz 8, der unter Beachtung von (12) anwendbar ist, gibt daher gleichmäßig für alle $\gamma_0 \leqq \sigma \leqq \gamma$

$$f(s) = O(|t|^{\frac{\gamma - \sigma}{\gamma - \gamma_0}}), \quad (e)$$

[33]) Statt (56) kann sogar $F(s) = O(e^{|t|^k})$ stehen, was hier jedoch nicht gebraucht wird.

und also auch für den restlichen Streifen $\gamma_1 \leqq \sigma \leqq \gamma$

$$f(s) = O\left(|t|^{\frac{\gamma-\gamma_1}{\gamma-\gamma_0}}\right) = o(|t|). \tag{f}$$

Es sei hier bereits die Bemerkung hervorgehoben, daß ich in Hilfssatz 9 die Voraussetzung (18) nicht durch (19) zu ersetzen vermag und daß dies der Grund ist, weshalb die Behandlung der allgemeinen Reihen (4) in diesem Paragraphen mitunter besondere Schwierigkeiten verursachen wird. Dagegen gilt

Hilfssatz 10. *Es sei* $\gamma < \gamma_0 < \gamma'$, *alle drei aus* (11), γ_0 *überdies aus* (8). *Auf* $\sigma = \gamma$ *und* $\sigma = \gamma'$ *gelte*

$$u(s) \geqq 0. \tag{19}$$

Dann ist gleichmäßig in jedem Streifen

$$\gamma + \varepsilon \leqq \sigma \leqq \gamma' - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

die Abschätzung (20) *erfüllt.*

Den Beweis vermittelt die sogenannte Carathéodorysche Ungleichung:

Hilfssatz 11[34]). *Es sei* $\varphi(z)$ *für* $z \leqq R$ *regulär. Für* $0 < r \leqq R$ *bezeichne* $M(r)$ *das Maximum von* $|\varphi(z)|$, $m(r)$ *das Minimum von* $\Re(\varphi(z))$ *auf dem Kreise* $|z| = r$.

Dann gilt für $0 < r < R$

$$M(r) \leqq \frac{2R}{R-r}(2|\varphi(0)| - m(r)). \tag{59}$$

Hiermit läuft der Beweis von Hilfssatz 10 folgendermaßen:

Zunächst gilt (19) nach Satz II sogar für alle $\gamma \leqq \sigma \leqq \gamma'$. Es sei ferner $s_0 = \gamma_0 + it_0$ ein beliebiger, zunächst fester Punkt auf $\sigma = \gamma_0$. Wir setzen

$$\begin{aligned} &d = \operatorname{Min}(\gamma' - \gamma_0,\ \gamma_0 - \gamma), \\ &z = s - s_0, \qquad \varphi(z) \equiv f(s) = f(z + s_0), \\ &R = d, \qquad r = \frac{d}{2}. \end{aligned} \tag{a}$$

Die Anwendung von (59) ergibt, unter Beachtung von $m(r) \geqq 0$, für alle $|s - s_0| \leqq \frac{d}{2}$

$$|f(s)| \leqq 4 \cdot 2 |f(s_0)|. \tag{b}$$

Läßt man nun s_0 die Gerade $\sigma = \gamma_0$ durchwandern, so gilt, da auf dieser

[34]) Vgl. etwa E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, § 24, S. 89. Berlin, Julius Springer 1916.

nach Hilfssatz 1 die Abschätzung (20) erfüllt ist, diese wegen (b) gleichmäßig auch für alle

$$\gamma_0 - \frac{d}{2} = \gamma_1 \leqq \sigma \leqq \gamma_1' = \gamma_0 + \frac{d}{2}. \tag{c}$$

Läßt man jetzt $\sigma = \gamma_1$ und $\sigma = \gamma_1'$ die bisherige Rolle von $\sigma = \gamma_0$ spielen und so fort, so ist es klar, daß man nach endlich vielen Schritten jeden Streifen

$$\gamma + \varepsilon \leqq \sigma \leqq \gamma' - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0) \tag{d}$$

in den Gültigkeitsbereich der gleichmäßigen Abschätzung (20) einfangen kann.

Wir erhalten jetzt zunächst als Verallgemeinerung der klassischen Cauchyabschätzung den

Satz XIV. *Es sei γ aus (11) und auf $\sigma = \gamma$ für ein $M > 0$*

$$|f(s)| \leqq M \tag{18}$$

erfüllt.

Dann gilt für alle n

$$|a_n| \leqq M e^{\lambda_n \gamma}. \tag{60}$$

Beweis. Auf jeder Geraden $\sigma = \gamma_0$ aus (8) gilt die Landausche Limesformel (37). Ist daher γ aus (8), so folgt (60) unmittelbar. Anderenfalls sei etwa $\gamma \leqq \sigma_B$. Nach Hilfssatz 9 gilt dann gleichmäßig für alle $\gamma \leqq \sigma \leqq \gamma_0$

$$f(s) = o(|t|), \tag{20}$$

und daher läßt sich (37) offenbar von der Geraden $\sigma = \gamma_0$ auf $\sigma = \gamma$ verlegen, womit dann der Satz evident ist.

Um aus Satz XIV eine interessante Folgerung abzuleiten, schicken wir zwei Hilfsbemerkungen voraus.

1. Ersetzt man in Hilfssatz 8 den Streifen (24) durch den Halbstreifen

$$\sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_0'; \quad t \geqq t_0 \qquad (\text{oder auch } t \leqq t_0) \tag{61}$$

und setzt also auch (55) und (56) nur dementsprechend voraus, so bleibt (57) gleichmäßig in (61) richtig[35]).

2. In Satz IX kann (37) auch durch

$$a_n = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{Ti} \int_{\gamma}^{\gamma + Ti} e^{\lambda_n s} f(s)\, ds \tag{62}$$

mit geradlinigem Integrationsweg ersetzt werden, wie der unter [29]) zitierte Beweis sofort lehrt.

[35]) Dies ist nur eine unwesentliche Variante von Hilfssatz 8 (Lindelöf).

Jetzt können wir folgenden Satz beweisen

Satz XV. *Es sei* γ *aus* (11) *und auf* $\sigma = \gamma$ *existiere bei endlichem* A

$$\lim_{t \to \infty} f(\gamma + it) = A. \tag{63}$$

Dann ist $f(s) \equiv A$.

Anmerkung. Da der Satz natürlich auch gilt, wenn statt (63)

$$\lim_{t \to \infty} f(\gamma - it) = A \tag{63a}$$

existiert, so folgt insbesondere die für die Lindelöfsche μ-Funktion[12]) wichtige Tatsache, daß stets $\mu(\sigma) \geqq 0$ ist.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $A = 0$, anderenfalls man $f(s) - A$ betrachte. Es sei ferner etwa

$$\gamma < \gamma_0 < \sigma_B' \tag{a}$$

und γ_0 aus (8).

Wegen (63) gilt jedenfalls für alle $t \geqq 0$

$$f(\gamma + it) = O(1). \tag{b}$$

Unsere Hilfsbemerkung 1 lehrt daher, genau mit dem Beweise von Hilfssatz 9, daß gleichmäßig für alle $\gamma \leqq \sigma \leqq \gamma_0$, $t \geqq 0$

$$f(s) = o(t) \tag{c}$$

erfüllt ist.

Folglich kann in (62), das für γ_0 gewiß gilt, auch unser γ gewählt werden, also für alle n und übrigens bei beliebigem $t_0 > 0$

$$a_n = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{Ti} \int_{\gamma + t_0 i}^{\gamma + Ti} e^{\lambda_n s} f(s)\, ds. \tag{d}$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ kann man nun wegen $A = 0$ ein $t_0 = t_0(\varepsilon)$ so bestimmen, daß für alle $t \geqq t_0$

$$|f(\gamma + ti)| \leqq \varepsilon \tag{e}$$

wird, woraus für alle n aus (d)

$$|a_n| \leqq \varepsilon \cdot e^{\lambda_n \gamma} \tag{f}$$

und mithin $f(s) \equiv 0$ folgt.

Dem Satze XIV entspricht der in der Potenzreihentheorie gleichfalls wohlbekannte

Satz XVI. *Es sei* γ *aus* (11) *und auf* $\sigma = \gamma$

$$u(s) \geqq 0 \tag{19}$$

erfüllt.

Dann ist

$$\alpha_0 \geqq 0 \tag{64}$$

und für alle n

$$|a_n e^{-\lambda_n \gamma} + \bar{a}_{-n} e^{\lambda_n \gamma}| \leqq 2\alpha_0. \tag{65}$$

Beweis. I. In der Reihe (4) seien nur endlich viele a_n mit $n < 0$ oder nur endlich viele a_n mit $n > 0$ von 0 verschieden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den ersten (in der Literatur üblichen) Fall.

Es sei

$$\gamma_0 > \mathrm{Max}\,(\sigma_B, \gamma), \tag{a}$$

so daß die Limesformel (37) auf $\sigma = \gamma_0$ gilt. Es sei ferner $\gamma_1 < \gamma$ ebenfalls aus (11). Nach (12) gibt es ein $k > 0$, so daß für $\varepsilon > 0$ im Streifen

$$\gamma_1 \leqq \sigma \leqq \gamma + \varepsilon \tag{b}$$

die Abschätzung

$$f(s) = O(|t|^k) \tag{c}$$

gilt, insbesondere also auch auf $\sigma = \gamma_1$. Auf $\sigma = \gamma + \varepsilon$ ist ber sogar wegen Satz VIII

$$f(s) = O(1) = O(|t|^0). \tag{d}$$

Hilfssatz 8 lehrt daher offenbar für genügend kleines ε etwa

$$f(s) = O(|t|^{\frac{1}{2}}) = o(|t|) \tag{e}$$

in $\gamma \leqq \sigma \leqq \gamma + \varepsilon$ und wegen Satz VIII sogar in $\gamma \leqq \sigma \leqq \gamma_0$. Somit kann (37) auf $\sigma = \gamma$ verlegt werden und daselbst gilt dann auch die Fourierformel (38). Insbesondere ist für $n = 0$

$$\alpha_0 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2Ti} \int_{\gamma - Ti}^{\gamma + Ti} u(s)\, ds. \tag{66}$$

Aus (66) und (38) folgt jetzt unmittelbar die Behauptung.

II. Wenn bei einer allgemeinen Reihe (4) die Gerade $\sigma = \gamma$ aus (8) ist, ist der Satz aus (66) und (38) evident. Wenn aber γ nicht aus (8) ist, so sehe ich keine Möglichkeit, die Limesformel (38) auf $\sigma = \gamma$ zu übertragen. Dieser Fall erfordert daher einen besonderen Beweis, den ich am Ende dieses Paragraphen im Anschluß an die tiefere Koeffizientenformel (51) geben werde. Er gilt auch für I. und ist unabhängig von den Ergebnissen des § 1 und dem Lindelöfschen Hilfssatze 8.

Vorläufig aber schließen wir an Satz XVI noch folgende Bemerkungen an:

1. Wenn in der Reihe (4) alle a_n mit $n < 0$ verschwinden, so lautet doch (65) für $n \geqq 1$

(65a) $$|a_n| \leqq 2\alpha_0 e^{\lambda_n \gamma}.$$

In (64) ist also unter unserer Voraussetzung nur dann $\alpha_0 = 0$ möglich, wenn

(a) $$f(s) \equiv i\beta_0$$

wird.

Wenn nun statt (19) auf $\sigma = \gamma$ sogar

(18) $$f(s) \leqq M$$

gilt, so ist nach (60) insbesondere

(b) $$|a_0| \leqq M.$$

Steht hierin, immer unter unserer Voraussetzung über die a_n, das Gleichheitszeichen, also etwa

(c) $$a_0 = Me^{i\vartheta_0},$$

so ist doch in der Dirichletschen Reihe für

(d) $$g(s) = -e^{-i\vartheta_0} f(s) + M$$

der erste zu $n = 0$ gehörige Koeffizient $= 0$, während auf $\sigma = \gamma$

(e) $$\Re g(s) \geqq 0$$

ist. Es folgt daher nach (a)

(f) $$g(s) \equiv 0,$$

d. h.

(g) $$f(s) \equiv a_0.$$

Hiermit ist jetzt nachträglich der noch fehlende Nachweis für die Behauptung bezüglich (32) des Satzes VII gebracht. Man beachte nämlich daselbst (e) und, daß a_{n_0} der erste zu $n = 0$ gehörige Koeffizient in der Dirichletschen Reihe für $f_1(s) = f(s)e^{\lambda_{n_0} s}$ ist.

Die entsprechende Behauptung bei $l(\sigma)$ folgt natürlich analog.

2. Allgemeiner ist, unter denselben Voraussetzungen über die a_n und (18), wenn

(h) $$a_0 = |a_0| e^{i\vartheta_0}$$

gesetzt wird, der erste zu $n = 0$ gehörige Koeffizient in (d) gleich $M - |a_0|$, woraus wegen (e) und (65a) für $n \geqq 1$ die wichtige Abschätzung

(67) $$|a_n| \leqq 2(M - |a_0|) e^{\lambda_n \gamma}$$

hervorgeht.

(67) bleibt übrigens offenbar richtig, wenn $\beta_0 = 0$ (also in (h) $\vartheta_0 = 0$ oder $\vartheta_0 = \pi$) vorausgesetzt wird und (18) durch das schwächere

$$|u(s)| \leqq M \tag{68}$$

auf $\sigma = \gamma$ ersetzt wird. Die Betrachtung der Funktion $f(s) - i\beta_0$ lehrt dann allgemeiner unter der Beschränkung (68) die Gültigkeit von

$$|a_n| \leqq 2\,(M - |a_0|)\, e^{\lambda_n \gamma}. \tag{69}$$

Aus (67) erhält man nun mit Leichtigkeit folgende Übertragung eines bekannten Potenzreihensatzes des Herrn Bohr[17]) auf Dirichletsche Reihen:

Satz XVII. *In der Reihe* (4) *mögen alle* a_n *mit* $n < 0$ *verschwinden. Es sei* γ *aus* (11) *und auf* $\sigma = \gamma$

$$|f(s)| \leqq M \tag{18}$$

erfüllt.

Ferner sei

$$l = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log n}{\lambda_n} < \infty. \tag{70}$$

Dann gibt es ein nur durch den λ*-Typus, nämlich als die gewiß vorhandene untere Grenze* $(< \infty)$ *der die Ungleichung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \sigma} \leqq \frac{1}{2} \tag{71}$$

erfüllenden σ *bestimmtes* ϑ, *so daß für* $\sigma \geqq \gamma + \vartheta$ *auch*

$$\mathsf{M}(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, e^{-\lambda_n \sigma} \leqq M \tag{72}$$

wird.

Vorbemerkung. Der Bohrsche Satz ($\lambda_n = n$) lehrt insbesondere, daß es λ-Typen gibt, für welche das ϑ des Satzes durch kein kleineres ersetzt werden kann.

Beweis. Nach (67) und (70)[36]) gilt für $\sigma > \gamma + l$ und auch (bez. sogar) für $\sigma \geqq \gamma + \vartheta$

$$\mathsf{M}(\sigma) \leqq |a_0| + 2\,(M - |a_0|) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n(\sigma - \gamma)}, \tag{a}$$

also für $\sigma \geqq \gamma + \vartheta$ wegen (71)

$$\mathsf{M}(\sigma) \leqq |a_0| + 2\,(M - |a_0|) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \vartheta} \leqq M. \tag{b}$$

In die Reihe dieser Sätze gehört auch der folgende, der eine Verallgemeinerung des bekannten Carathéodoryschen Theorems[16]) über

[36]) l ist die Konvergenzabszisse σ_B von $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n s}$ (Handbuch § 207, Satz 5, S. 732). (4) konvergiert also wegen (60) gewiß für $\sigma > l + \gamma$ absolut.

Potenzreihen mit positivem Realteile (in zweidimensionaler Fassung) darstellt. Der Beweis ergibt sich aus den Formeln (38) leicht und dem bei den Potenzreihen völlig entsprechend[37]).

Satz XVIII. *In der Reihe* (4) *mögen alle* a_n *mit* $n < 0$ *verschwinden. Es sei* γ *aus* (11) *und auf* $\sigma = \gamma$

$$u(s) \geqq 0 \tag{19}$$

erfüllt.

Ferner bezeichne für ganzes positives r *und alle* s

$$s_r(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{r} a_n e^{-\lambda_n s}, \tag{73}$$

$$S_r(s) = a_0 + 2a_0 \sum_{n=1}^{r} e^{-\lambda_n (s-\gamma)} = a_0 + \sum_{n=1}^{r} A_n e^{-\lambda_n s}, \tag{74}$$

und falls

$$l = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log n}{\lambda_n} < \infty \tag{70}$$

ist, für $\sigma > l + \gamma$

$$F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n s}. \tag{75}$$

Dann gilt folgendes:

1. *Es ist stets* $|a_n| \leqq A_n$.

2. *Bei beliebigem* γ_0 *und* r *enthält die konvexe Hülle*[38]) *der Bildkurve der Geraden* $\sigma = \gamma_0$ *durch* $S_r(s)$ *die Bildkurve dieser Geraden durch* $s_r(s)$.

3. *Wenn* (70) *erfüllt ist, so enthält bei jedem* $\gamma_0 > \gamma + l$ *die konvexe Hülle der Bildkurve der Geraden* $\sigma = \gamma_0$ *durch* $F(s)$ *die Bildkurve dieser Geraden durch* $f(s)$.

Anmerkung. Nach Satz VIII ist $f(s)$ für alle $\sigma \geqq \gamma + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ gleichmäßig beschränkt, während Behauptung 3 ein Gleiches nur für $\sigma > \gamma + l$ aussagt. Diese Aussage aber gibt jetzt offenbar für eine ganze Funktionenklasse Bildschranken, wovon dort nicht die Rede war. Für $\lambda_n = n$ enthält 3. nach Rückgängigmachung der Transformation (7) insbesondere die Carathéodorysche Ungleichung des Hilfssatzes 11.

Schließlich sei auch noch ein klassischer Satz von Liouville[39]) über ganze Funktionen für Dirichletsche Reihen formuliert.

---

[37]) Vgl. des Verfassers: Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten, Math. Zeitschr. 17 (1923), S. 260—276; siehe Satz II auf S. 265.

[38]) Unter der konvexen Hülle einer Punktmenge ist die kleinste abgeschlossene, konvexe Menge verstanden, die jene enthält.

[39]) Vgl. in etwas allgemeinerer Fassung: Handbuch 1, § 73, S. 302.

Satz XIX. *Es sei* $\sigma_e' = \infty$,[11] C *und* c *beliebige reelle Zahlen. Auf unendlich vielen Geraden* $\sigma = \gamma$, *worunter beliebig große vorkommen, gelte*

$$u(s) \geqq C e^{c\gamma}. \tag{76}$$

Dann ist $a_n = 0$ *für alle* $\begin{matrix} n < 0 \\ \lambda_n < \mathrm{Min}\,(0, -c) \end{matrix}$, *wenn* $C \overset{=}{\neq} 0$ *ist.*

Vorbemerkung. Die Kombination

$$C > 0, \quad c > 0$$

ist nicht möglich, weil α_0 nach Satz XVI ebenfalls $\geqq C e^{c\gamma}$ würde.

Beweis. Auf irgendeiner der Geraden $\sigma = \gamma > \sigma_e$ betrachten wir die Funktion

$$f(s) - C e^{cs}, \tag{a}$$

die daselbst einen nicht negativen Realteil besitzt. Für alle $n \neq 0$ ist daher wegen (65)

$$|a_n| \leqq 2\,(\alpha_0 - C e^{c\gamma})\, e^{\lambda_n \gamma} + |a_{-n}|\, e^{2\lambda_n \gamma}, \tag{b}$$

wo die rechte Seite bei $C = 0$ für $n < 0$, bei $C \neq 0$ für $\lambda_n < \mathrm{Min}\,(0, -c)$ mit $\gamma \to \infty$ gegen 0 strebt.

Ein entsprechender Satz gilt natürlich, wenn $\sigma_e = -\infty$ ist; er läßt sich mit dem ausgesprochenen zu einem Satze über ganze $f(s)$ kombinieren.

Nunmehr wollen wir den Beweis des Satzes XVI auch im allgemeinsten Falle erledigen. Es sei (4) eine allgemeine Dirichletsche Reihe und $\sigma = \gamma$, auf dem (19) gilt, aus (11) aber nicht aus (8), etwa $\gamma \leqq \sigma_B$. Ferner sei γ_0 aus (8), $m \geqq 0$ eine beliebige ganze Zahl, für jeden Index n ein

$$0 < \varepsilon = \varepsilon_n = \varepsilon_{-n} < \mathrm{Min}\,\{\lambda_{n+1} - \lambda_n,\ \lambda_n - \lambda_{n-1},\ \lambda_1\}$$

gewählt und

$$\eta = \frac{\pi}{\varepsilon} \tag{a}$$

gesetzt. Ich behaupte sodann zunächst die Gültigkeit der Koeffizientenformel

$$a_n = \frac{\eta^m m!}{2^m} \cdot \frac{i^{m-1}}{\pi} \int_{(\gamma_0)} \frac{e^{\lambda_n s} \operatorname{Sin}^m \varepsilon s}{s\,(s + i\eta) \ldots (s + im\eta)}\, f(s)\, ds. \tag{77}$$

In der Tat ist für $m = 0$ diese Formel mit (48) des Satzes XII auf $\sigma = \gamma_0$ identisch. Allgemein beweisen wir sie durch den Induktionsschluß von m auf $m + 1$.

Auf $\sigma = \gamma_0$ ist doch

$$f(s - i\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n \eta} e^{-\lambda_n s}, \tag{b}$$

also nach unserer Induktionsannahme

$$(c)\quad a_n e^{i\lambda_n \eta} = \frac{\eta^m m!}{2^m}\cdot\frac{i^{m-1}}{\pi}\int\limits_{(\gamma_0)} \frac{e^{\lambda_n s}\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon s}{s(s+i\eta)\dots(s+im\eta)} f(s-i\eta)\,ds$$

$$= -\,e^{i\lambda_n\eta}\,\frac{\eta^m m!}{2^m}\cdot\frac{i^{m-1}}{\pi}\int\limits_{(\gamma_0)} \frac{e^{\lambda_n s}\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon s}{(s+i\eta)(s+i\cdot 2\eta)\dots(s+i(m+1)\eta)} f(s)\,ds,$$

da

$$(d)\qquad \mathfrak{Sin}\,\varepsilon(s+i\eta) = \mathfrak{Sin}\,(\varepsilon s + i\pi) = -\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon s$$

ist.

Durch Addition von (77) und (c) ergibt sich sofort

$$a_n = \frac{\eta^m m!}{2^{m+1}}\cdot\frac{i^{m-1}}{\pi}\int\limits_{(\gamma_0)} e^{\lambda_n s}\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon s\, f(s)\left\{\frac{1}{s(s+i\eta)\dots(s+im\eta)} - \frac{1}{(s+i\eta)\dots(s+i(m+1)\eta)}\right\} ds$$

$$= \frac{\eta^{m+1}(m+1)!}{2^{m+1}}\cdot\frac{i^m}{\pi}\int\limits_{(\gamma_0)} \frac{e^{\lambda_n s}\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon s}{s(s+i\eta)\dots(s+i(m+1)\eta)} f(s)\,ds,$$

d. h. (77) für $m+1$.

Nun gibt es nach (12) ein reelles k, so daß gleichmäßig für alle $\gamma \leqq \sigma \leqq \gamma_0$

$$(f)\qquad f(s) = O(|t|^k)$$

gilt. Daher läßt sich (77) für alle $m \geqq k$ auf unser $\sigma = \gamma$ verlegen.

Betrachtet man nun statt $f(s)$ auf $\sigma = \gamma$ vielmehr $f(s+\gamma)$ auf $\sigma = 0$, so erhält man

$$(77\,a)\qquad a_n = \frac{\eta^m m!}{2^m}\cdot\frac{i^{m-1}e^{\lambda_n\gamma}}{\pi}\int\limits_{(0)} \frac{e^{\lambda_n s}\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon s}{s(s+i\eta)\dots(s+im\eta)} f(s+\gamma)\,ds$$

$$= \frac{\eta^m m!}{2^m}\cdot\frac{e^{\lambda_n\gamma}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda_n t}\sin\varepsilon t}{t(t+\eta)\dots(t+m\eta)} f(\gamma,t)\,dt,$$

also

$$\bar a_{-n} = \frac{\eta^m m!}{2^m}\cdot\frac{e^{-\lambda_n\gamma}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda_n t}\sin\varepsilon t}{t(t+\eta)\dots(t+m\eta)}\,\overline{f(\gamma,t)}\,dt$$

und hieraus die Fourierformel

$$(78)\quad a_n e^{-\lambda_n\gamma} + \bar a_{-n} e^{\lambda_n\gamma} = \frac{\eta^m m!}{2^{m-1}\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda_n t}\sin\varepsilon t}{t(t+\eta)\dots(t+m\eta)}\,u(\gamma,t)\,dt.$$

Es sei jetzt sogar $m \geqq k+1$. Für

$$(g)\qquad -(m+1)\eta \leqq t \leqq \eta$$

ist

$$\text{(h)} \qquad \frac{\sin \varepsilon t}{t(t+\eta)\dots(t+m\eta)} \geqq 0$$

und endlich. Daher und wegen (19) ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \varepsilon t}{t(t+\eta)\dots(t+m\eta)}\, u(\gamma, t)\, dt \geqq \int_{-\infty}^{-(m+1)\eta} + \int_{\eta}^{\infty} \frac{\sin \varepsilon t}{t(t+\eta)\dots(t+m\eta)}\, u(\gamma, t)\, dt,$$

also nach (78) mit $n = 0$

$$\text{(i)} \qquad \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\eta^m m!}{2^m \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \varepsilon t}{t(t+\eta)\dots(t+m\eta)}\, u(\gamma, t)\, dt \\ &\geqq -\frac{\eta^m m!}{2^m \pi} \left\{ \int_{-\infty}^{-(m+1)\eta} \frac{u(\gamma, t)}{t\cdot(t+\eta)\dots(t+m\eta)}\, dt + \int_{\eta}^{\infty} \frac{u(\gamma, t)}{t(t+\eta)\dots(t+m\eta)}\, dt \right\}, \end{aligned}$$

wo die Integrale rechts wegen (f) auch gewiß konvergieren. Wir schreiben noch kürzer

$$\text{(j)} \qquad \alpha_0 \geqq -\frac{\eta^m m!}{2^m \pi} \int_{\eta}^{\infty} \frac{u(\gamma, t) + u(\gamma, -(t+m\eta))}{t(t+\eta)\dots(t+m\eta)}\, dt.$$

Nun ist aber für $m > k+1$

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \eta^m m! \int_{\eta}^{\infty} \frac{u(\gamma, t) + u(\gamma, -(t+m\eta))}{t(t+\eta)\dots(t+m\eta)}\, dt \\ &= \eta^{m-1}(m-1)! \int_{\eta}^{\infty} \left\{ \frac{1}{t(t+\eta)\dots(t+(m-1)\eta)} - \frac{1}{(t+\eta)(t+2\eta)\dots(t+m\eta)} \right\} \\ &\qquad \cdot [u(\gamma, t) + u(\gamma, -(t+m\eta))]\, dt \\ \text{(k)} \qquad &\leqq \eta^{m-1}(m-1)! \int_{\eta}^{\infty} \frac{u(\gamma, t) + u(\gamma, -(t+m\eta))}{t(t+\eta)\dots(t+(m-1)\eta)}\, dt, \end{aligned}$$

also für alle $m \geqq k+1$

$$\text{(l)} \qquad 0 \leqq \eta^m m! \int_{\eta}^{\infty} \frac{u(\gamma, t) + u(\gamma, -(t+m\eta))}{t(t+\eta)\dots(t+m\eta)}\, dt \leqq \eta^{k+1}(k+1)! \int_{\eta}^{\infty} \frac{u(\gamma, t) + u(\gamma, -(t+m\eta))}{t(t+\eta)\dots(t+(k+1)\eta)}\, dt.$$

In dem Integrale rechts ist wegen (f) gleichmäßig in m und t

$$\text{(m)} \qquad u(\gamma, -(t+m\eta)) = O(t+m\eta)^k = O(t^k m^k),$$

also

$$\text{(n)} \qquad \int_{\eta}^{\infty} \frac{u(\gamma, t) + u(\gamma, -(t+m\eta))}{t(t+\eta)\dots(t+(k+1)\eta)}\, dt = O\left(m^k \int_{\eta}^{\infty} \frac{t^k}{t(t+\eta)\dots(t+(k+1)\eta)}\, dt\right) = O(m^k)$$

gleichmäßig in m bei festem ε also η.

Aus (j), (l) und (n) folgt jetzt gleichmäßig in dem m

$$\text{(o)} \qquad \alpha_0 \leqq O\left(\frac{m^k}{2^m}\right) = o(1),$$

womit (64) bewiesen ist.

Ferner ist wegen (h)

$$\text{(p)} \qquad \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda_n t}\sin\varepsilon t}{t(t+\eta)\dots(t+m\eta)}\,u(\gamma,t)\,dt\right| \leqq \int_{-(m+1)\eta}^{\eta} \frac{\sin\varepsilon t}{t(t+\eta)\dots(t+m\eta)}\,u(\gamma,t)\,dt + \int_{\eta}^{\infty} \frac{u(\gamma,t)+u(\gamma,-(t+m\eta))}{t(t+\eta)\dots(t+m\eta)}\,dt$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\varepsilon t}{t(t+\eta)\dots(t+m\eta)}\,u(\gamma,t)\,dt + 2\int_{\eta}^{\infty} \frac{u(\gamma,t)+u(\gamma,-(t+m\eta))}{t(t+\eta)\dots(t+m\eta)}\,dt,$$

also unter Beachtung von (78), (a), (i) und dem eben Bewiesenen gleichmäßig in m

$$\text{(q)} \qquad |a_n e^{-\lambda_n\gamma} + \bar{a}_{-n} e^{\lambda_n\gamma}| \leqq 2\alpha_0 + O\left(\frac{m^k}{2^m}\right),$$

d. h. aber (65).

§ 4.

Sei $\varphi(z)$ durch die im „Kreisringe" $r_1 < |z| < r_2$ konvergente Laurentreihe (6) erklärt, so ist bekanntlich[40]), wenn

$$z = \varrho e^{i\vartheta} \qquad (r_1 < \varrho < r_2),$$

$$\chi(z) = \Re\,\varphi(z)$$

gesetzt wird,

$$\text{(79)} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(\varrho e^{i\vartheta})|^2\,d\vartheta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \varrho^{2n}$$

und

$$\text{(80)} \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} (\chi(\varrho e^{i\vartheta}))^2\,d\vartheta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n\varrho^n + \bar{a}_{-n}\varrho^{-n}|^2.$$

Wenn also auf dem Kreise $|z| = \varrho$ für ein $M > 0$

$$|\varphi(z)| \leqq M \quad \text{bzw.} \quad |\chi(z)| \leqq M$$

ist, so folgt

$$\text{(81)} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \varrho^{2n} \leqq M^2$$

bzw.

$$\text{(82)} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n\varrho^n + \bar{a}_{-n}\varrho^{-n}|^2 \leqq 4M^2,$$

[40]) Vgl. etwa den folgenden Hilfssatz 12 unter Beachtung der gleichmäßigen Konvergenz von (6) auf $|z| = \varrho$.

oder, was dasselbe ist,

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \varrho^n + \bar{a}_{-n} \varrho^{-n}|^2 \leqq 2M^2. \tag{82a}$$

Herrn Carlson[18]) ist es gelungen, die Abschätzung (81) für die üblichen Dirichletschen Reihen unter der Voraussetzung (18) zu verallgemeinern. Sein Beweis basiert im wesentlichen auf geschickter Benutzung des bekannten Rieszschen Summierungsverfahrens[41]). Diese Methode scheint aber bei Behandlung der allgemeinsten Reihen (4) zu versagen. Ich werde daher in diesem Paragraphen einen neuen Beweis für die Verallgemeinerung von (81) geben, der ganz allgemein zum Ziele führt, und zugleich die Abschätzung (82) unter der Voraussetzung (68) übertragen.

Hilfssatz 12. *Es sei $f(s)$ eine Dirichletsche Reihe mit nur endlich vielen $a_n \neq 0$*

$$f(s) = \sum_{n=n_0}^{n_1} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (n_0 \leqq n_1).$$

Dann ist

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(ti)|^2 \, dt = \sum_{n=n_0}^{n_1} |a_n|^2, \tag{83}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} \int_{-T}^{T} (u(ti))^2 \, dt = \sum_{n=\mathrm{Min}(n_0,\,-n_1)}^{\mathrm{Max}(n_1,\,-n_0)} |a_n + \bar{a}_{-n}|^2. \tag{84}$$

Beweis. I. Es ist

$$|f(ti)|^2 = \sum_{n=n_0}^{n_1} a_n e^{-\lambda_n ti} \cdot \sum_{m=n_0}^{n_1} \bar{a}_m e^{\lambda_m ti} \tag{a}$$

$$= \sum_{n=n_0}^{n_1} |a_n|^2 + \sum_{\substack{n,\,m=n_0 \\ n\neq m}}^{n_1}{}' a_n \bar{a}_m e^{(\lambda_m - \lambda_n) ti},$$

also

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(ti)|^2 \, dt = \sum_{n=n_0}^{n_1} |a_n|^2 + \sum{}' a_n \bar{a}_m \frac{e^{(\lambda_m-\lambda_n)Ti} - e^{(\lambda_n-\lambda_m)Ti}}{2Ti(\lambda_m - \lambda_n)} \tag{b}$$

$$\to \sum_{n=n_0}^{n_1} |a_n|^2.$$

II. Die Reihe

$$f_1(s) = \sum_{n=-n_1}^{-n_0} \bar{a}_{-n} e^{-\lambda_n s} \tag{c}$$

[41]) H. R., Kap. IV, S. 19 ff.; vgl. insbesondere den Zusatz zu Theorem 41 auf S. 54 bezüglich gleichmäßiger Summabilität, der für den Carlsonschen Beweis wesentlich ist, aber bei den allgemeinen Reihen kein Analogon hat.

genügt auf der Geraden $\sigma = 0$ der Relation

(d) $$f_1(s) = \bar{f}(s),$$

die Reihe

(e) $$f_2(s) = f(s) + f_1(s) = \sum_{n=\mathrm{Min}(n_0,\,-n_1)}^{\mathrm{Max}(n_1,\,-n_0)} (a_n + \bar{a}_{-n})\, e^{-\lambda_n s}$$

ebenda der Relation

(f) $$f_2(s) = 2\,u(s).$$

Daher ist nach (b)

(g) $$\lim_{T\to\infty} \frac{2}{T} \int_{-T}^{T} (u(ti))^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f_2(ti)|^2\, dt = \sum_{n=\mathrm{Min}(n_0,-n_1)}^{\mathrm{Max}(n_1,\,-n_0)} |a_n + \bar{a}_{-n}|^2.$$

Hilfssatz 13. *Es sei* $\gamma > 0$ *aus* (8), $x > 0$, $\eta = \frac{\pi}{x}$, $m \geqq 1$ *ganz. Dann ist*

(85) $$\frac{i^{m-1}\,\eta^m\, m!}{\pi} \int_{(\gamma)} \frac{\mathfrak{Sin}\, x s}{s(s+i\eta)\ldots(s+im\eta)}\, f(s)\, ds = \sum_{|\lambda_n| \leqq x} a_n (1 + e^{i\lambda_n \eta})^m.$$

Beweis. Bildet man mit den Bezeichnungen des Satzes X die Differenz $K(x, \gamma, 0) - K(-x, \gamma, 0)$, so erhält man unmittelbar

(a) $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} \frac{\mathfrak{Sin}\, x s}{s} f(s)\, ds = \sum_{|\lambda_n| \leqq x}{}' a_n,$$

also mit $f(s - i\eta)$ statt $f(s)$

(b) $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} \frac{\mathfrak{Sin}\, x s}{s} f(s - i\eta) = \sum_{|\lambda_n| \leqq x}{}' a_n e^{i\lambda_n \eta}.$$

Nun ist aber

(c) $$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} \frac{\mathfrak{Sin}\, x s}{s} f(s - i\eta)\, ds = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma - i(T+\eta)}^{\gamma + i(T-\eta)} \frac{\mathfrak{Sin}\, x s}{s + i\eta} f(s)\, ds$$

$$= \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} \frac{\mathfrak{Sin}\, x s}{s + i\eta} f(s)\, ds,$$

wie aus Hilfssatz 1 offenbar folgt. Addition von (a) und (b) ergibt daher weiter

(d) $$\lim_{T\to\infty} \frac{\eta}{\pi} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} \frac{\mathfrak{Sin}\, x s}{s(s+i\eta)} f(s)\, ds = \sum_{|\lambda_n| \leqq x}{}' a_n (1 + e^{i\lambda_n \eta}) = \sum_{|\lambda_n| \leqq x} a_n (1 + e^{i\lambda_n \eta}).$$

Ferner kann der Hauptwert des Integrals links in (d) durch $\int_{(\gamma)}$ ersetzt werden, wie bei $\lambda_m = x$ durch Zerlegung von $f(s)$ in

$$f(s) = (f(s) - a_m e^{-\lambda_m s}) + a_m e^{-\lambda_m s}$$

evident wird. (d) ist daher mit (85) für $m = 1$ identisch.

Nehmen wir nunmehr (85) zum Zwecke der Induktion als richtig an und beweisen es für $m+1$! Angewandt auf $f(s - i\eta)$ statt $f(s)$ ergibt es

$$\text{(e)} \quad \frac{i^{m-1}\eta^m m!}{\pi} \int_{(\gamma)} \frac{\mathfrak{Sin}\, x s}{s(s+i\eta)\dots(s+im\eta)} f(s-i\eta)ds = \sum_{|\lambda_n| \leqq x} a_n e^{i\lambda_n \eta}(1+e^{i\lambda_n\eta})^m$$

$$= -\frac{i^{m-1}\eta^m m!}{\pi} \int_{(\gamma)} \frac{\mathfrak{Sin}\, x s}{(s+i\eta)(s+i2\eta)\dots(s+i(m+1)\eta)} f(s)\,ds,$$

und zu (85) addiert

$$\text{(f)} \quad \frac{i^m \eta^{m+1}(m+1)!}{\pi} \int_{(\gamma)} \frac{\mathfrak{Sin}\, x s}{s(s+i\eta)\dots(s+i(m+1)\eta)} f(s)\,ds = \sum_{|\lambda_n| \leqq x} a_n (1+e^{i\lambda_n\eta})^{m+1},$$

d. i. (85) für $m+1$.

Satz XX. *Es sei $M > 0$ und γ aus* (11).

I. *Wenn auf* $\sigma = \gamma$

$$|f(s)| \leqq M \tag{18}$$

gilt, so ist

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \gamma} \leqq M^2. \tag{86}$$

II. *Wenn auf* $\sigma = \gamma$

$$|u(s)| \leqq M \tag{68}$$

gilt, so ist

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n e^{-\lambda_n \gamma} + \bar{a}_{-n} e^{\lambda_n \gamma}|^2 \leqq 4M^2. \tag{87}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\gamma = 0$, anderenfalls man $f(s+\gamma)$ betrachte. Ferner kann man stets durch ev. Betrachtung von $f(-s)$ statt $f(s)$ ein γ_1 aus (8) mit $\gamma_1 > 0$ annehmen.

Dann gilt nach Hilfssatz 13, angewandt auf $f(s + t_0 i)$ bei beliebigem reellen t_0, für alle $x > 0$ und $m \geqq 1$

$$\text{(a)} \quad \frac{i^{m-1}\eta^m m!}{\pi} \int_{(\gamma_1)} \frac{\mathfrak{Sin}\, x s}{s(s+i\eta)\dots(s+im\eta)} f(s+it_0)ds = \sum_{|\lambda_n| \leqq x} a_n e^{-i\lambda_n t_0}(1+e^{i\lambda_n\eta})^m.$$

Da $\gamma = 0$ aus (11) ist, gilt für ein gewisses k in $0 \leqq \sigma \leqq \gamma_1$ gleichmäßig die Abschätzung

$$\text{(b)} \quad f(s) = O(|t|^k).$$

Für $m \geqq k$ kann daher das Integral links in (a) auf die Gerade $\sigma = 0$ verlegt werden, also für diese m

$$\sum_{|\lambda_n| \leqq x} a_n e^{-i\lambda_n t_0}(1 + e^{i\lambda_n \eta})^m = \frac{i^{m-1}\eta^m m!}{\pi} \int_{(0)} \frac{\mathfrak{Sin}\, xs}{s(s+i\eta)\dots(s+im\eta)} f(s+it_0)\,ds$$

$$= \frac{\eta^m m!}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xt}{t(t+\eta)\dots(t+m\eta)} f(i(t+t_0))\,dt$$

$$= \pi^{m-1} m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t(t+\pi)\dots(t+m\pi)} f\left(i\left(\frac{t}{x}+t_0\right)\right) dt.$$

I. Es ist (man vergleiche den Beweis auf S. 312!)

$$\text{(d)} \qquad \left| \pi^{m-1} m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t(t-\pi)\dots(t+m\pi)} f\left(i\left(\frac{t}{x}+t_0\right)\right) dt \right|$$

$$\leqq \pi^{m-1} m!\, M \int_{-(m+1)\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t(t+\pi)\dots(t+m\pi)}\,dt + 2\pi^{m-1} m!\, M \int_{\pi}^{\infty} \frac{dt}{t(t-\pi)\dots(t+m\pi)}$$

$$\leqq \pi^{m-1} m!\, M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t(t+\pi)\dots(t+m\pi)}\,dt + 4\pi^{m-1} m!\, M \int_{\pi}^{\infty} \frac{dt}{t(t+\pi)\dots(t+m\pi)}.$$

Hierin ist nach (c), angewandt auf $f(s) \equiv 1$,

$$\text{(e)} \qquad \pi^{m-1} m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t(t+\pi)\dots(t+m\pi)}\,dt = 2^m$$

und ferner für $m \geqq 2$

$$\text{(f)} \qquad \pi^{m-1} m! \int_{\pi}^{\infty} \frac{dt}{t(t+\pi)\dots(t+m\pi)}$$

$$= \pi^{m-2}(m-1)! \left\{ \int_{\pi}^{\infty} \frac{dt}{t(t+\pi)\dots(t+(m-1)\pi)} - \int_{\pi}^{\infty} \frac{dt}{(t+\pi)\dots(t+m\pi)} \right\}$$

$$< \pi^{m-2}(m-1)! \int_{\pi}^{\infty} \frac{dt}{t(t+\pi)\dots(t+(m-1)\pi)} < \int_{\pi}^{\infty} \frac{dt}{t(t+\pi)}.$$

Also gilt nach (c) bis (f) für alle $m \geqq \mathrm{Max}(1, k)$, alle t_0 und alle $x > 0$ gleichmäßig

$$\text{(g)} \qquad \left| \sum_{|\lambda_n| \leqq x} a_n e^{-i\lambda_n t_0}(1 + e^{i\lambda_n \eta})^m \right| \leqq 2^m M + 4M \int_{\pi}^{\infty} \frac{dt}{t(t+\pi)}.$$

Nun folgt sofort, wenn man die Formel (83) des Hilfssatzes 12 auf die Dirichletsche Reihe

$$\text{(h)} \qquad \sum_{|\lambda_n| \leqq x} a_n (1 + e^{i\lambda_n \eta})^m e^{-\lambda_n s}$$

anwendet, gleichmäßig für alle unsere x und m

$$\text{(i)} \qquad \sum_{|\lambda_n| \leqq x} |a_n|^2 |1 + e^{i\lambda_n \eta}|^{2m} \leqq \left(2^m M + 4M \int_{\pi}^{\infty} \frac{dt}{t(t+\pi)}\right)^2.$$

Für jedes $y > 0$ ist daher, indem man $x \geqq y$ wählt, erst recht

$$\text{(j)} \qquad \sum_{|\lambda_n| \leqq y} |a_n|^2 |1 + e^{i\lambda_n \frac{\pi}{x}}|^{2m} \leqq \left(2^m M + 4M \int_{\pi}^{\infty} \frac{dt}{t(t+\pi)}\right)^2,$$

woraus mit $x \to \infty$

$$\text{(k)} \qquad \sum_{|\lambda_n| \leqq y} |a_n|^2 \cdot 2^{2m} \leqq \left(2^m M + 4M \int_{\pi}^{\infty} \frac{dt}{t(t+\pi)}\right)^2,$$

sodann mit $m \to \infty$

$$\text{(l)} \qquad \sum_{|\lambda_n| \leqq y} |a_n|^2 \leqq M^2$$

und schließlich mit $y \to \infty$ das behauptete (86) folgt.

II. Aus (c) ergibt sich sofort

$$\text{(m)} \qquad \Re\left\{\sum_{|\lambda_n| \leqq x} a_n e^{-i\lambda_n t_0} (1 + e^{i\lambda_n \eta})^m\right\}$$

$$= \pi^{m-1} m! \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin t}{t(t+\pi)\ldots(t+m\pi)}\, u\left(i\left(\frac{t}{x} + t_0\right)\right) dt$$

und hieraus, genau wie unter I, jedoch unter Anwendung der Formel (84) von Hilfssatz 12 das behauptete (87).

Zusätze. 1. Aus (86) folgt wieder die Cauchyabschätzung (60) und weiterhin, in Verallgemeinerung der Bemerkung 1 nach Satz XVI, daß, wenn in (60) das Gleichheitszeichen eintritt, die Reihe (4) sich auf

$$f(s) \equiv a_n e^{-\lambda_n s}$$

reduziert.

2. Bringt man (87) in die Form

$$\text{(87a)} \qquad 2\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{-\lambda_n \gamma} + \bar{a}_{-n} e^{\lambda_n \gamma}|^2 \leqq 2M^2,$$

so bekommt man die Abschätzung

$$\text{(88)} \qquad |a_n e^{-\lambda_n \gamma} + \bar{a}_{-n} e^{\lambda_n \gamma}| \leqq M \cdot \sqrt{2} \qquad (n \neq 0).$$

3. Aus (87) folgt offenbar, wenn nur endlich oft $|a_n \cdot a_{-n}| \neq 0$ ist, also z. B. bei den in der Literatur üblichen Reihen, die Konvergenz von

$$\text{(a)} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \gamma}.$$

Das gleiche kann man auch noch für allgemeine Reihen (4) schließen, wenn es nur überhaupt ein γ_1 gibt, so daß

$$\text{(b)} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \gamma_1}$$

konvergiert[42]).

Denn aus (b) folgt, je nachdem $\gamma_1 >$ oder $< \gamma$ ist, zunächst die Konvergenz von

$$\text{(c)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_{-n}|^2 e^{2\lambda_n \gamma} \quad \text{oder} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \gamma}.$$

Sei etwa ohne Beschränkung der Allgemeinheit das letztere der Fall. Dann ist

$$\text{(d)} \qquad \sum_{n=1}^{m} |a_{-n}|^2 e^{2\lambda_n \gamma} = \sum_{n=1}^{m} |a_{-n} e^{\lambda_n \gamma} + \bar{a}_n e^{-\lambda_n \gamma} - \bar{a}_n e^{-\lambda_n \gamma}|^2$$

$$\leqq 2 \left\{ \sum_{n=1}^{m} |a_{-n} e^{\lambda_n \gamma} + \bar{a}_n e^{-\lambda_n \gamma}|^2 + \sum_{n=1}^{m} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \gamma} \right\},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Eine vierte Folgerung aus Satz XX, die zugleich die Verallgemeinerung eines bekannten Bohrschen[43]) Satzes über Dirichletsche Reihen und eines Hardyschen[44]) Potenzreihensatzes darstellt, sei besonders formuliert als

Satz XXI. *Es sei* γ *aus* (11) *und* $M > 0$. *In der Reihe* (4) *mögen nur endlich viele* a_n *mit* $n < 0$ *von* 0 *verschieden sein, und auf* $\sigma = \gamma$ *gelte*

$$\text{(68)} \qquad |u(s)| \leqq M.$$

Schließlich sei

$$\text{(70)} \qquad l = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log n}{\lambda_n} < \infty.$$

Dann konvergiert (4) *absolut für* $\sigma > \gamma + \frac{l}{2}$.

Wird daselbst

$$\text{(72)} \qquad \mathsf{M}(\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}$$

---

[42]) Wenn also z. B. γ_1 aus (11) ist und $M(\gamma_1)$ existiert.

[43]) H. Bohr, Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variablen in der Theorie der Dirichletschen Reihen $\sum a_n n^{-s}$, Göttinger Nachrichten (1913), S. 441–488; vgl. auch Enc. Art. S. 741–742.

[44]) G. H. Hardy, A Theorem concerning Taylor's series, The quat. Journ. of pure and appl. Math. **44** (1913), p. 149.

und für $\sigma > l$ [36])

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n s} \tag{89}$$

gesetzt, so gilt, wenn (89) *für* $\sigma = l$ *divergiert,*

$$\lim_{\sigma \to \gamma + \frac{l}{2} + 0} \frac{M(\sigma)^2}{G(2(\sigma-\gamma))} = 0. \tag{90}$$

Beweis. Es sei zuerst $a_{n_0} \neq 0$ und $n_0 < m < p$ ganzzahlig. Dann ist

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=-\infty}^{p} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} = \sum_{n=n_0}^{m} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} + \sum_{n=m+1}^{p} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}$$

$$\leqq \sum_{n=n_0}^{m} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} + \sqrt{\sum_{n=m+1}^{p} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \gamma} \cdot \sum_{n=m+1}^{p} e^{-2\lambda_n (\sigma-\gamma)}},$$

also für $\sigma > \gamma + \frac{l}{2}$ und $m \geqq -1$

$$\text{(b)} \quad \sum_{n=-\infty}^{p} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} \leqq \sum_{n=n_0}^{m} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} + \sqrt{\sum_{n=m+1}^{p} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \gamma} \cdot G(2(\sigma-\gamma))},$$

und mit $p \to \infty$ unter Beachtung von Zusatz 3 zu Satz XX

$$\text{(c)} \quad M(\sigma) \leqq \sum_{n=n_0}^{m} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} + \sqrt{\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \gamma} \cdot G(2(\sigma-\gamma))},$$

$$\text{(d)} \quad \overline{\lim_{\sigma \to \gamma + \frac{l}{2} + 0}} \frac{M(\sigma)^2}{G(2(\sigma-\gamma))} \leqq \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \gamma},$$

woraus mit $m \to \infty$ die Behauptung folgt.

Wenn übrigens (89) für $\sigma = l$ konvergiert, so (4) absolut für $\sigma = \gamma + \frac{l}{2}$.

Königsberg i. Pr., den 1. Januar 1923.

(Eingegangen am 28. Dezember 1923.)

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN W 9

Soeben erschien:

Spektroskopie der Röntgenstrahlen

von

Dr. Manne Siegbahn

Professor an der Universität Upsala

VI und 257 Seiten mit 119 Textabbildungen. Format 15,5 × 23,5 cm

15 Goldmark; gebunden 16 Goldmark

Fürs Ausland 3,60 Dollar; gebunden 3,85 Dollar

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Soeben erschien:

Mathematische Schwingungslehre

Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sowie einiges über partielle Differentialgleichungen und Differenzengleichungen

Von

Dr. Erich Schneider

Mit 49 Abbildungen (VI, 194 S.)

8,40 Goldmark; geb. 9,15 Goldmark

2 Dollar; geb. 2,20 Dollar

Wir suchen zu kaufen

Zeitschrift, Mathematische

komplette Exemplare,
Serien und evtl. auch Einzelbände und

zahlen höchste Preise

Wir sind auch jederzeit Käufer aller technischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften sowie von Einzelwerken von Wert auf allen Gebieten.

.....

Angebote (mögl. mit Preisforderung) erbittet

K. F. Koehlers Antiquarium

LEIPZIG **Täubchenweg 21**

Verlangen Sie unsere Kataloge „Neuerwerbungen" unter Angabe Ihrer Wissensgebiete!

Ankauf von Bibliotheken!

Bei der Redaktion eingegangene Schriften

Unter dieser Rubrik werden wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften veröffentlich die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, v dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu woll

L. Graetz, Der Äther und die Relativitätstheorie. Sechs Vorträge. M 19 Abbildungen. 80 S. 8°. J. Engelhorns Nachf., Stuttgart.

W. Sierpiński, Analiza (Analysis). Bd. I., erster Teil. Liczby rzeczwiste zespolone (reelle und komplexe Zahlen). 2. Auflage. Warschau. V, 225 Gr. 8°. (1923.)

W. Sierpiński, Zarys teorji muspości (Abriß der Mengenlehre). Erst Teil. Liczby pozaskończone (Transfinite Zahlen). 2. Aufl. Warschau. I 198 S. Gr. 8°. (1923.)

M. de Broglie, Exposé concernant les résultats actuels relatifs aux é ments isotopes. Paris, Librairie scientifique J. Hermann. (1923.) 15 S.

M. Lecat, Compléments à la bibliographie des séries trigonométriqu Louvain. 1924. Chez l'auteur. 16 S. 8°.

A. W. Wasiljeff, Die ganze Zahl. Historische Skizze mit 24 Bildern und Zei nungen und einer Tafel. Petrograd. 1922. 272 + IV S. Kl. 8°. (Geschicl der Zahlentheorie, russisch.)

Seminario matematico della facoltà di scienze della r. università di Ron Rendiconti delle sedute dell' anno accademico 1922—1923 pubblicati per cu del segretario Prof. Francesco Tricomi, Serie II, Vol. I, 88 S. Gr. 8°. Roma 19

Christiaan Huygens, International mathematisch tijdschrift. Onder redac van Dr. Fred. Schuh. Uitgave van P. Noordhoff te Groningen. Eer Jaargang, 1921—1922. 384 S. Tweede Jaargang 1922—1923, 384 S.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Ka Ohrtmann und Felix Müller, fortgesetzt von Emil Lampe, gegenwär herausgegeben von Leon Lichtenstein. Band 46, Jahrgang 1916—19 Heft 3, S. 961—1280. Fünfter und sechster Abschnitt. (Geometrie u Mechanik). Das vierte, Schlußheft erscheint demnächst. Das erste Heft 47. Bandes, Jahrgang 1919—1920, wird Ende Mai erscheinen. Bis Ende 19 ist die Herausgabe des 47. Bandes und eines Teiles des 48. Bandes, Ja gang 1921—1922, in Aussicht genommen.

Hierzu eine Beilage der Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.